МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ В. Г. КОРОЛЕНКО»

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие

для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование

(с двумя профилями подготовки) математических профилей

Учебное электронное издание

на компакт-диске

Глазов

ГГПИ

2022

ISBN 978-5-93008-381-1

УДК 372.851
ББК 74.262.21
О26

Рекомендовано научно-методическим советом ФГБОУ ВО «ГГПИ им. В. Г. Короленко» в качестве учебно-методического пособия. Протокол № 11 от 28.06.2022.

Автор-составитель – канд. пед. наук Н. В. Леонтьева

Рецензент – канд. пед. наук, доцент кафедры математики и информатики ФГБОУ ВО «ГГПИ им. В. Г. Короленко» Н. Г. Дюкина

О26 **Обучение школьников решению задач конструктивной геометрии на плоскости и в пространстве** : учебно-методическое пособие для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) математических профилей / автор-составитель Н. В. Леонтьева. – Глазов : Глазовский государственный педагогический институт, 2022. – 1,0 Мб. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), одним из профилей которого является Математика. Предложенные задания к практическим занятиям по курсу «Вопросы обучения решению олимпиадных задач и задач повышенной сложности по математике» включают в себя базовые задания и задания для самостоятельной работы студентов.

Пособие может быть использовано для подготовки к лекционным, практическим занятиям, зачетам и для самостоятельной работы студентов. Оно будет полезно школьникам и учителям для подготовки к занятиям.

Системные требования: процессор с тактовой частотой 1,3 ГГц и выше; 256 Мб RAM; свободное место на HDD 1,0 Мб; Windows 2000/XP/7/8/10; Adobe Acrobat Reader; дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше; мышь.

Учебное издание электронное издание
на компакт-диске

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки) математических профилей

Технический редактор, корректор *М. В. Пермякова*
Оригинал-макет: *П. А. Горбушин*

Подписано к использованию 01.09.2022. Объем издания 1,0 Мб.
Тираж 8 экз. Заказ № 2809 – 2022.

ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко»
427621, Россия, Удмуртская Республика, г. Глазов, ул. Первомайская, д. 25
Тел./факс: 8 (34141) 5-60-09; e-mail: izdat@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1

АКСИОМЫ ПОСТРОЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Основные теоретические сведения

Инструментальные аксиомы построений на плоскости:

1) аксиома линейки:

– можно построить прямую, проходящую через две данные точки;

– можно построить отрезок, соединяющий две точки;

– можно построить луч, исходящий из одной точки и проходящий через другую точку;

2) аксиома циркуля:

– можно построить окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному отрезку;

– можно построить окружность с центром в данной точке, проходящую через другую заданную точку.

Исходные объекты в задаче даны физически: отрезки и углы построены на плоскости.

Базовые задачи

1. На плоскости даны три точки. Проведите через них все возможные прямые. Сколько решений имеет данная задача?

2. Сколько прямых из предыдущей задачи пересекаются?

3. На плоскости даны три точки. Проведите через них все возможные окружности. Сколько решений имеет данная задача?

4. Сколько окружностей из предыдущей задачи пересекаются?

5. Дан отрезок и точка, не лежащая на этом отрезке. Проведите окружность с центром в данной точке и радиусом, равным этому отрезку.

Задачи для самостоятельной работы

1. Решите базовую задачу 1 для пяти точек.

2. Пусть точка *A* плоскости неподвижна, а точка *B* свободно меняет свое положение. Опишите множество прямых, проходящих через точки *A* и *B*.

3. Решите базовую задачу 2 для пяти точек.

4. Пусть точка *A* плоскости неподвижна, а точка *B* свободно меняет свое положение. Опишите множество окружностей, проходящих через точку *B*, с центром в точке *A*.

5. В условиях базовой задачи 5 опишите множество окружностей, получающихся при изменении длины отрезка.

6. В условиях базовой задачи 5 опишите множество окружностей, полученных в случае, если центр окружности меняет свое положение.

Занятие 2

БАЗОВЫЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основные теоретические сведения

Базовые построения – построения, определяющие взаимное расположение построенных фигур.

Базовые построения:

1) построить точку, принадлежащую построенной фигуре;

2) построить точку, не принадлежащую построенной фигуре;

3) построить любое конечное число точек пересечения двух построенных фигур;

4) можно построить точку пересечения двух прямых, если она существует;

5) можно построить точки пересечения двух окружностей, если они пересекаются;

6) можно построить точки пересечения окружности и прямой, если они существуют.

Базовые задачи

1. На плоскости даны четыре точки. Через две из них проведите прямую. Постройте окружность с центром в третьей точке, проходящую через четвертую. Определите, существуют ли точки пересечения окружности и прямой.

2. В условиях предыдущей задачи как нужно изменить положение точек, чтобы пересечение окружности и прямой а) существовало; б) отсутствовало?

3. Можно ли расположить точки из задачи 1 так, чтобы прямая касалась окружности?

4. На плоскости построена окружность. Выберите точку на окружности. Выберите точку, не лежащую на окружности. Проведите окружность, проходящую через одну из выбранных точек, с центром в другой точке. Пересекаются ли две построенные окружности?

5. На плоскости построен отрезок. Выберите точку на отрезке. Выберите две точки вне отрезка. Соедините выбранные точки прямыми. Пересекаются ли построенные прямые и отрезок?

6. Можно ли изменить положение точек так, чтобы прямые не пересекали отрезок?

Задачи для самостоятельной работы

1. В базовой задаче 4 можно ли изменить положение точек так, чтобы окружности не пересекались?

2. На плоскости построена прямая. Выберите точку, лежащую на прямой, а также точку, не лежащую на ней. Проведите окружность с центром в одной из точек, проходящую через другую точку. Пересекаются ли окружность и прямая?

3. Можно ли изменить положение точек так, чтобы окружность и прямая не пересекались?

4. На плоскости проведена окружность. Через ее центр проведена прямая. Пересекает ли построенная прямая данную окружность?

5. Дан отрезок AB. Постройте окружность с центром в точке A и радиусом AB. Постройте окружность с центром в точке B и радиусом AB. Пересекаются ли данные окружности?

6. Дана прямая. Выберите точку вне прямой. Можно ли построить окружность так, чтобы она а) пересекала прямую; б) не пересекала прямую?

7. Дана прямая. Выберите точки по разные стороны от прямой. Постройте прямую, проходящую через эти точки. Пересекаются ли данные прямые?

8. Дана прямая. Выберите точки по одну сторону от прямой. Постройте прямую, проходящую через эти точки. Пересекаются ли данные прямые?

Задание 3
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основные теоретические сведения

Элементарные построения – простейшие задачи на построение, которые используются при решении более сложных задач.

Алгоритм решения задачи на построение:

1) анализ (предположим, что задача решена, на основе этого предположения ищем решение задачи);

2) построение (описание последовательности применения инструментов и базовых построений, позволяющих получить искомую фигуру, а также физическая реализация плана построения);

3) доказательство (обоснование того факта, что построенная фигура удовлетворяет всем заданным условиям);

4) исследование (изучение числа возможных решений, а также условий, при которых это решение существует).

Базовые задачи

1. Построение серединного перпендикуляра к отрезку.

Решение.

Дано. Отрезок *AB*.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 1). Пусть точка *O* – середина отрезка *AB*.

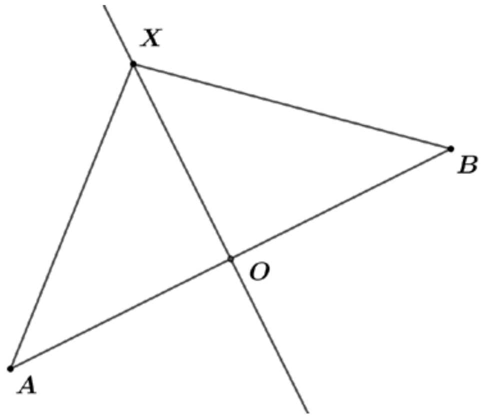

Рисунок 1

Выберем произвольную точку X на перпендикуляре. Соединим ее с точками A и B. Прямоугольные треугольники XAO и XBO равны по двум катетам. Соответственно точка X равноудалена от точек A и B. Таким свойством обладают точки, лежащие на окружности. Если построить окружности равных радиусов с центрами в точках A и B, то их пересечение даст точки с требуемыми условиями, через которые можно провести прямую.

Построение.

1. $\omega_1(A, AB), \omega_2(B, AB)$.

2. $\omega_1 \cap \omega_2 = \{X, Y\}$.

Прямая XY – искомая (рисунок 2).

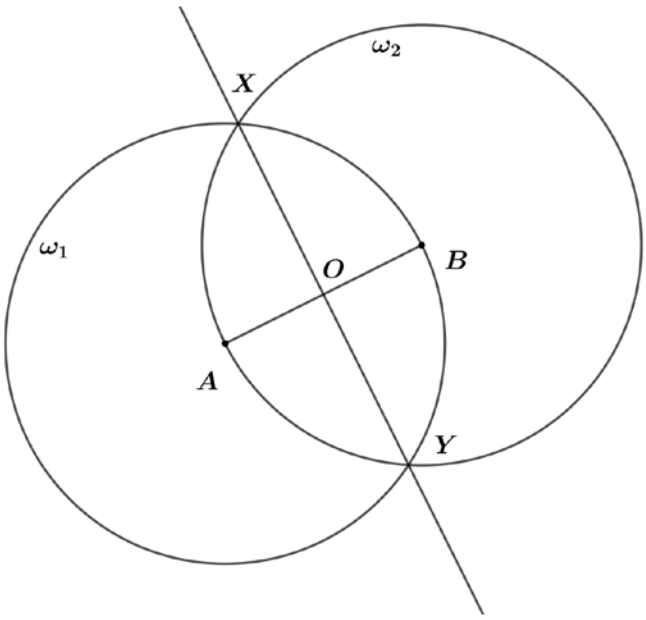

Рисунок 2

Доказательство. Пусть прямая XY пересекает отрезок AB в точке O. Так как окружности ω_1 и ω_2 имеют по построению равные радиусы, то $AXBY$ – ромб. Его диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения O пополам. Таким образом, прямая XY удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Пересечение окружностей ω_1 и ω_2 всегда существует. В силу единственности перпендикуляра задача имеет единственное решение.

2. Деление отрезка пополам.

Решение.

Серединный перпендикуляр пересекает исходный отрезок в середине. Таким образом, решение данной задачи сводится к предыдущей.

3. Построение на данной прямой отрезка, равного данному.

Решение.

Дано. Отрезок AB, прямая a.

Анализ. Предположим, что задача решена. Отрезок равной длины можно получить за счет построения окружности.

Построение.

1. $X \in a$.
2. $\omega(X, AB)$.
3. $\omega \cap a = \{S, T\}$.

SX – искомый (рисунок 3).

Доказательство. Длина отрезка SX равна длине исходного отрезка AB как радиус построенной окружности.

Исследование. Так как прямая a проходит через центр окружности, то существует две точки их пересечения и задача имеет два решения.

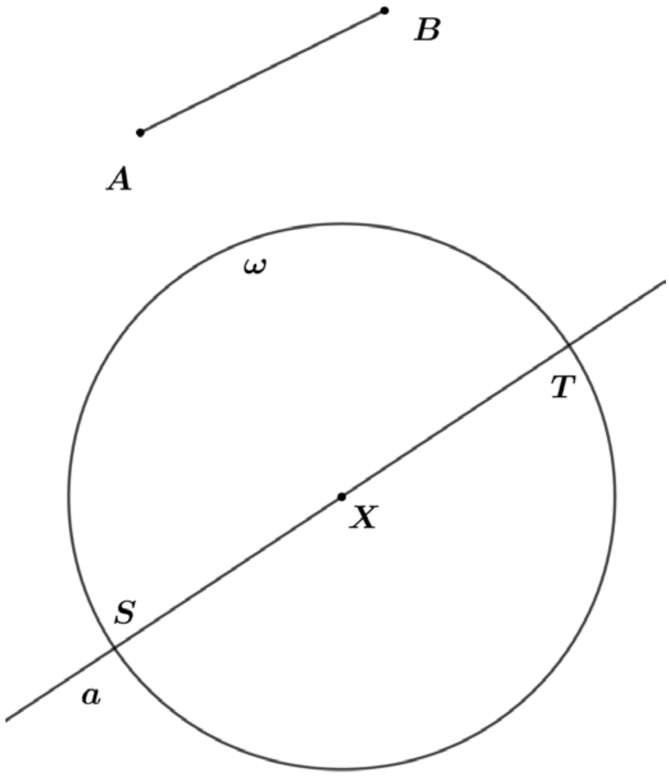

Рисунок 3

4. Деление данного угла пополам.

Решение.

Дано. Угол $\angle ABC$.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 4).

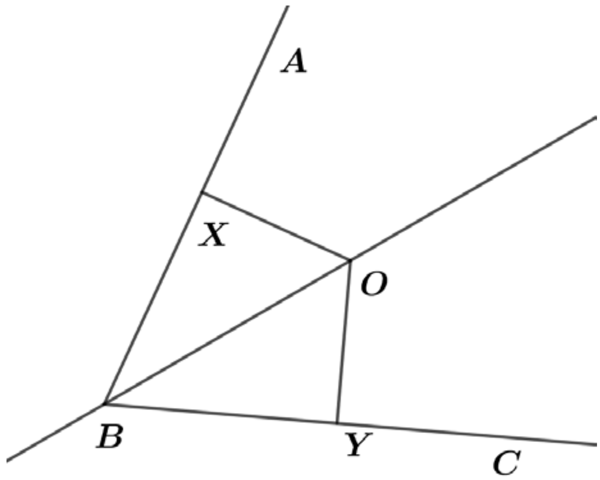

Рисунок 4

Выберем на построенной прямой точку O. Опустим из нее перпендикуляры на стороны угла. Так как $\angle ABO = \angle CBO$ по условию, то треугольники с общей гипотенузой $\Delta ABO = \Delta CBO$ равны. Следовательно, все точки прямой равноудалены от сторон угла. Точки на равном расстоянии можно построить с помощью окружности. Для этого требуется найти две точки, равноудаленные от начала угла.

Построение.

1. $\omega(B, r)$, где r – некоторое произвольное число.

2. $\omega \cap BA = X, \omega \cap BC = Y.$

3. $\omega_1(X, XB),\ \omega_2(Y, YB).$

4. $\omega_1 \cap \omega_2 = O.$

BO – искомая биссектриса (рисунок 5).

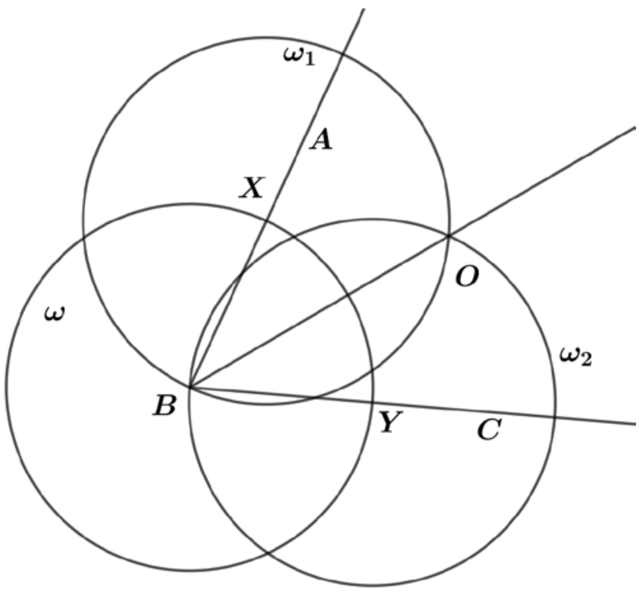

Рисунок 5

Доказательство. Соединим точки X и Y с точкой O. По построению $BX = OX = BY = OY$, откуда следует, что *BXOY* – ромб, диагональ *OB* которого делит угол *ABC* пополам (рисунок 6).

Исследование. Из построения следует, что точки *X*, *Y*, *O* всегда возможно найти. Поскольку биссектриса угла единственная, то задача всегда имеет единственное решение.

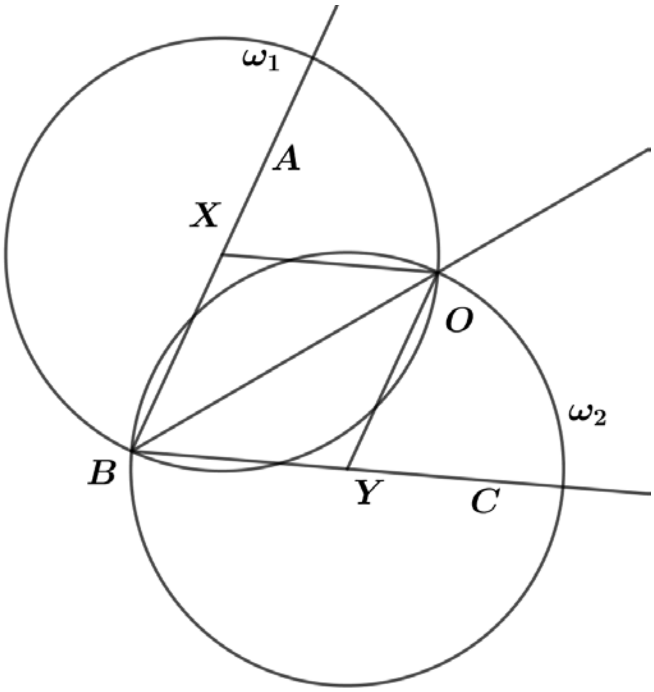

Рисунок 6

5. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Решение.

Дано. Прямая *a*, точка *A*, не лежащая на этой прямой.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 7).

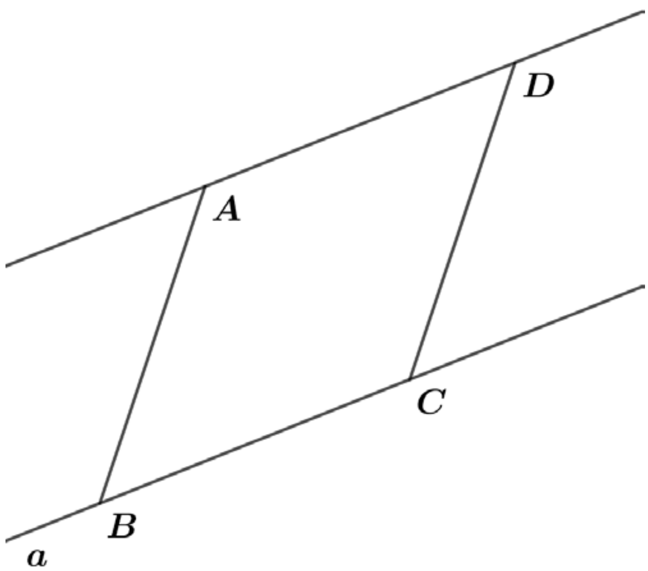

Рисунок 7

Построим ромб на данных прямых так, чтобы противоположные стороны лежали на двух параллельных прямых. Равноудаленные можно построить с помощью окружности.

Построение.

1. $B \in a$.

2. $\omega_1(B, AB)$.

3. $\omega_1 \cap a = C$.

4. $\omega_2(A, AB)$, $\omega_3(C, CB)$.

5. $\omega_2 \cap \omega_3 = D$.

AD – искомая (рисунок 8).

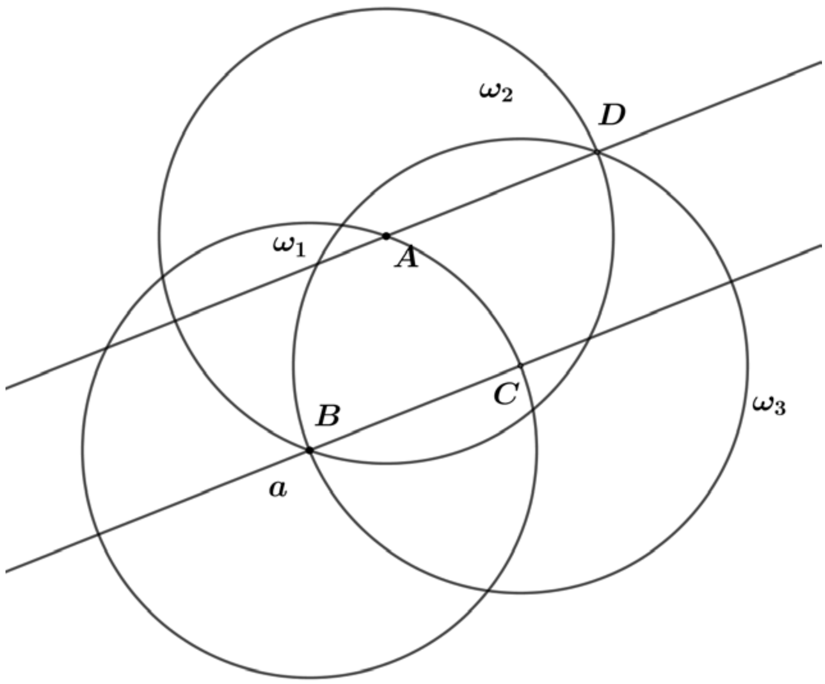

Рисунок 8

Доказательство. Все три окружности имеют одинаковый радиус. Следовательно, $AB = AD = BC = CD$ равны, как радиусы. Тогда $ABCD$ – ромб, противоположные стороны которого параллельны, AD параллельно a.

Исследование. По аксиоме о параллельных прямых задача имеет единственное решение. Пересечение всех окружностей существует всегда, что всегда позволяет найти решение.

Задачи для самостоятельной работы

1. Деление отрезка на данное число равных частей.

2. Деление отрезка в данном отношении.

3. Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.

4. Построение перпендикуляра к прямой, проходящего через точку, не лежащую на этой прямой.

5. Построение угла, равного данному.

6. Построение касательной к данной окружности.

7. Построение окружности через две заданные точки с радиусом, равным данному отрезку.

8. Нахождение центра построенной окружности.

9. Построение геометрического места точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

10. Построение к данным двум окружностям общей внешней касательной.

11. Построение к двум данным непересекающимся окружностям общей внутренней касательной.

12. Построение треугольника по трем сторонам.

13. Построение перпендикуляра к прямой, проходящего через точку, лежащую на этой прямой.

14. Через три данные точки провести окружность.

Занятие 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

Базовые задачи

1. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу, медиане, проведенной к этой стороне.

Решение.

Дано. Два отрезка a, m_a, угол α.

Анализ. Пусть искомый треугольник XYZ построен (рисунок 9). Точка O – середина основания XY.

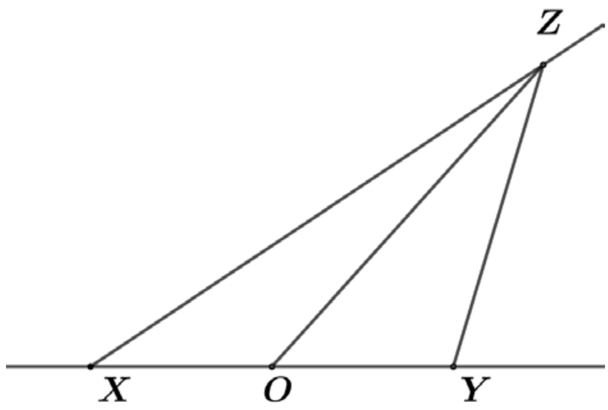

Рисунок 9

Если основание треугольника и прилежащий к ней угол построены, то третья вершина находится на расстоянии m_a от середины отрезка XY.

Построение.

1. $XY = a$.

2. $\angle YXK = \alpha$.

3. O – середина XY.

4. $\omega(O, m_a)$.

5. $\omega \cap XK = Z$.

XYZ – искомый (рисунок 10).

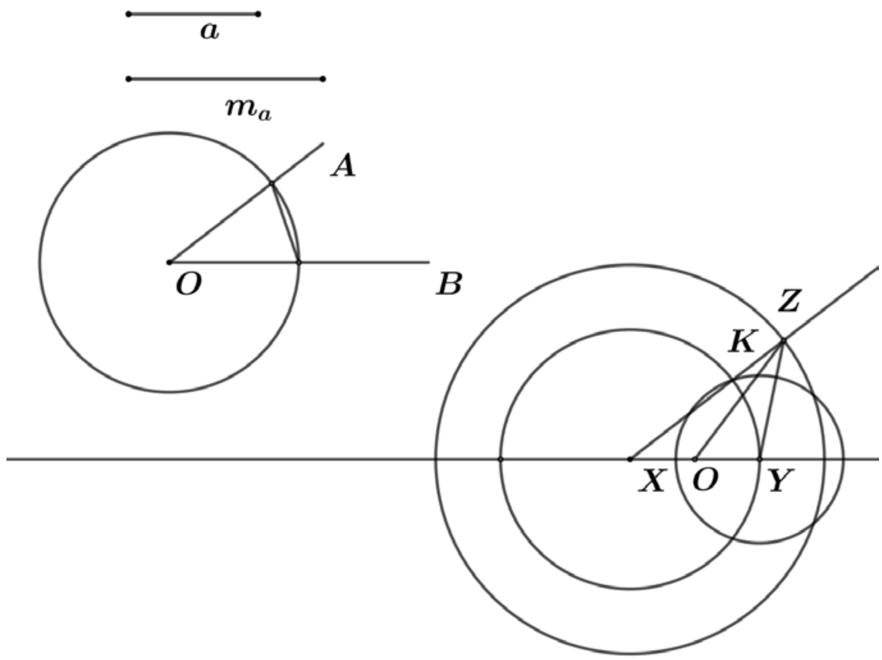

Рисунок 10

Доказательство. По построению основание $XY = a$, $\angle YXK = \alpha$. Кроме того, O – середина XY, $OZ = m_a$. Таким образом, треугольник удовлетворяет всем требованиям и является искомым.

Исследование. При построении существует два угла, равных α. В силу единственности середины отрезка и точки пересечения окружности с лучом, выходящим из ее центра, задача имеет два решения.

2. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине.

Решение.

Дано. Угол α, отрезок h.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 11).

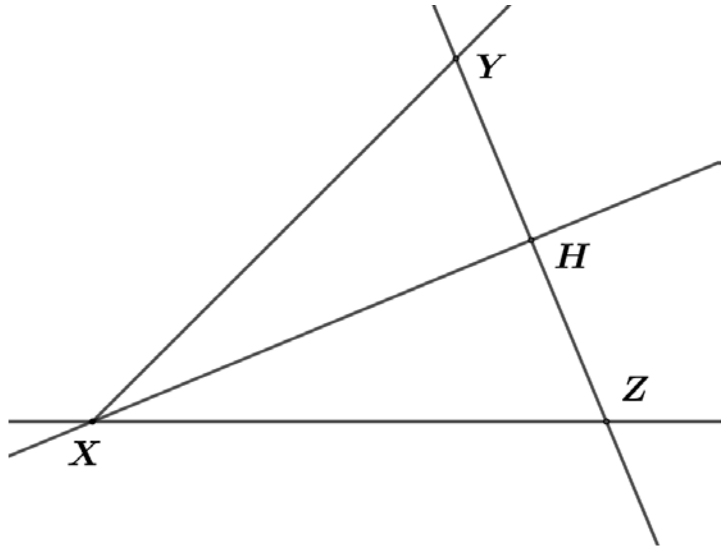

Рисунок 11

В равнобедренном треугольнике биссектриса и высота совпадают. Построение биссектрисы дает возможность определить основание высоты.

Построение.

1. Выберем произвольную прямую на плоскости и точку X на ней.

2. Отложим от этой прямой угол $\angle MXL$, равный α.

3. Построим биссектрису угла $\angle MXL$.

4. На биссектрисе отложим отрезок XH, равный h.

5. Через точку H проведем перпендикуляр d к биссектрисе.

6. $XM \cap d = Y,\ XL \cap d = Z$.

XYZ – искомый (рисунок 12).

Доказательство. По построению высота $XH = h$, $\angle YXH = \angle ZXH$. Соответственно, $\Delta YXH = \Delta ZXH$ и треугольник XYZ – равнобедренный.

Исследование. В силу единственности и существования биссектрисы, а также положения основания высоты на ней задача всегда имеет единственное решение.

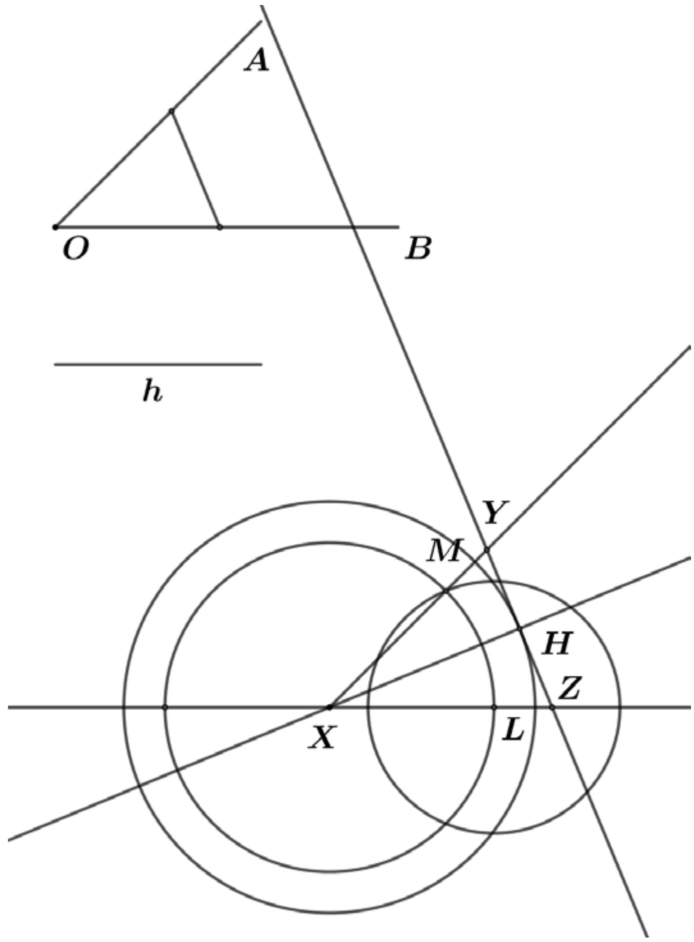

Рисунок 12

3. Постройте прямоугольник по стороне и сумме его диагоналей.

Решение.

Дано. Отрезки a, $2d$.

Анализ. У прямоугольника диагонали равны. Поделим отрезок, равный сумме диагоналей, пополам, что дает длину диагонали (рисунок 13).

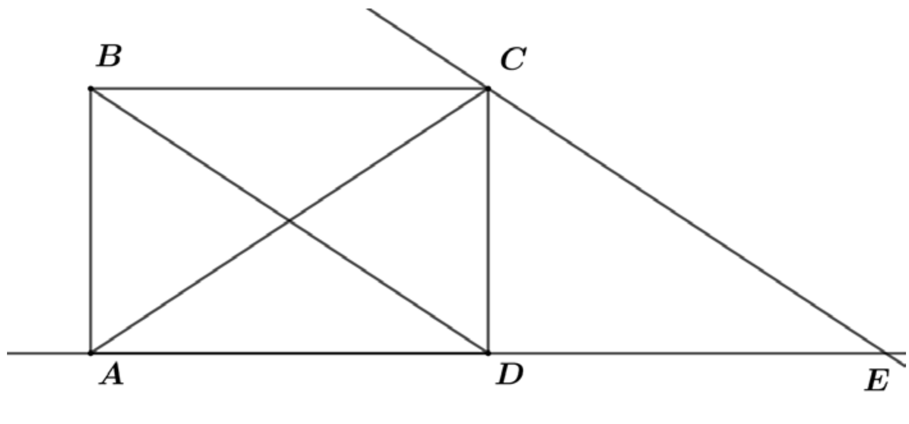

Рисунок 13

Пусть длина стороны AD известна и равна a. Проведем прямую через точку C параллельно диагонали BD. Пусть она пересекает продолжение стороны AD в точке E. Тогда у треугольника ACE две стороны равны d, а третья сторона равна $2a$. Построенный по трем сторонам треугольник позволяет найти искомую фигуру.

Построение.

1. Поделим отрезок $2d$ пополам, а отрезок a – удвоим.
2. Построим треугольник ACE с основанием $2a$ и сторонами d.
3. Найдем середину D стороны AE.
4. Через точку D проведем прямую m, параллельную CE.
5. Через точку C проведем прямую l, параллельную AE.
6. $m \cap l = B$.

$ABCD$ – искомый (рисунок 14).

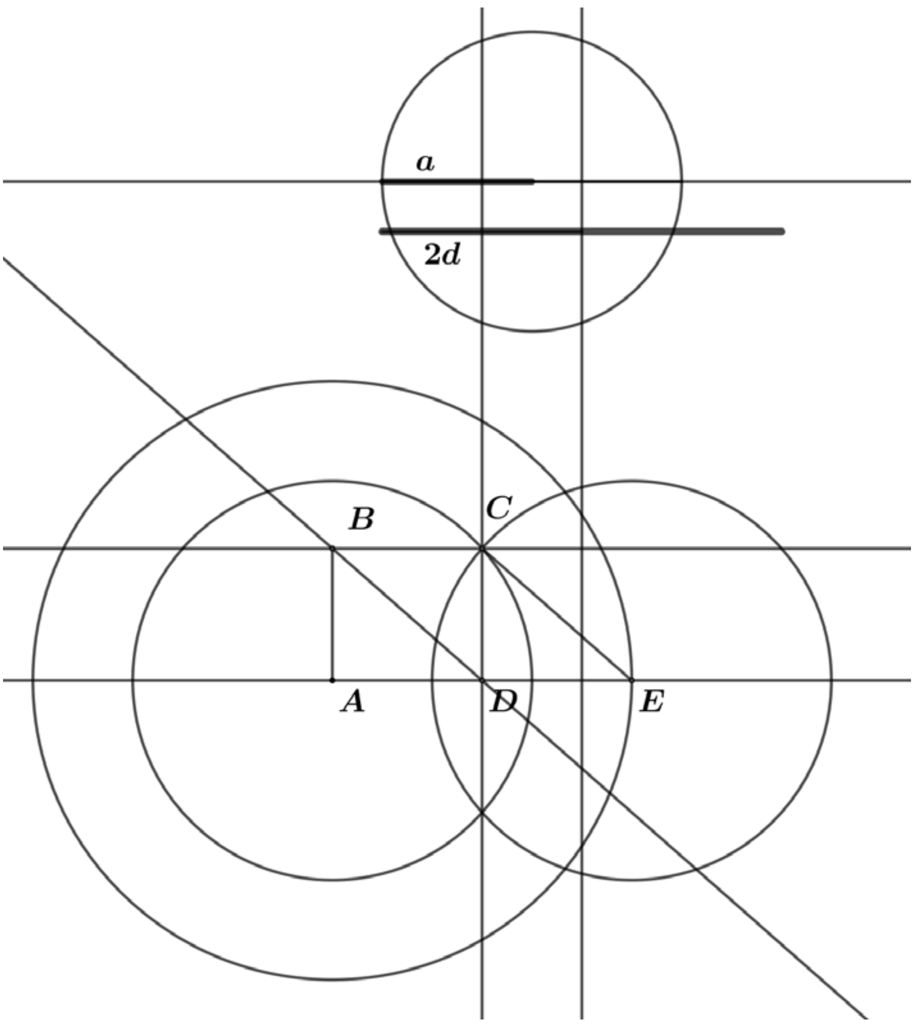

Рисунок 14

Доказательство. По построению ACE равнобедренный с боковой стороной, равной d. Длина стороны $AD = a$. Тогда $\angle CDA$ и $\angle DCB$ – прямые, так как они образованы медианой, проведенной к основанию равнобедренного треугольника. $BCED$ – параллелограмм, следовательно $BD = AC = d$. Из равенства треугольников ACD и BDC следует равенство сторон $AD = BC$. Углы $\angle DAC$ и $\angle BCA$ равны, как вертикальные при параллельных AD, BC и секущей AC. Равенство треугольников ACD и ABC по двум сторонам и углу между ними дает равенство сторон AB и CD. Пары противоположных сторон равны, $ABCD$ – параллелограмм. Так как один из его углов прямой, то он представляет собой прямоугольник.

Исследование. Из построения треугольника по трем сторонам следует, что существование решения возможно только в том случае, когда $2a < 2d$. Соответственно, задача имеет решение при условии, что $a < d$. В противном случае задача решения не имеет.

4. Впишите квадрат в данный круг.

Решение.

Дано. Дана окружность ω с центром в точке O.

Анализ. Предположим, что квадрат построен (рисунок 15).

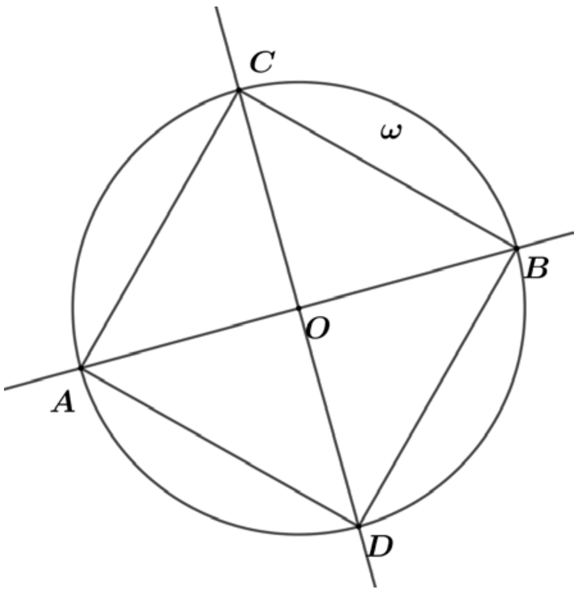

Рисунок 15

Прямой угол опирается на диаметр окружности, соответственно диагонали квадрата пересекаются в центре окружности.

Построение.

1. $A \in \omega$.

2. $AO \cap \omega = B$.

3. Построим серединный перпендикуляр h к AO, проходящий через точку O.

4. $h \cap \omega = \{C, D\}$.

$ACBD$ – искомый.

Доказательство. По построению AB и CD – диаметры. Тогда опирающиеся на них углы являются прямыми. Следовательно, $ACBD$ – прямоугольник. Треугольники AOC, COB, BOD, DOA прямоугольные с катетами, равными радиусу окружности. Соответственно, все эти треугольники равны. $ACBD$ – квадрат.

Исследование. В силу единственности серединного перпендикуляра задача имеет одно решение при выборе начальной точки A.

Задачи для самостоятельной работы

1. Постройте треугольник по стороне и прилежащим к ней углам.

2. Постройте параллелограмм по смежным сторонам и одной из диагоналей.

3. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, опущенной на эту сторону.

4. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

5. Построить треугольник по основанию и двум медианам, проведенным к боковым сторонам.

6. Постройте ромб по стороне и сумме диагоналей.

7. Постройте квадрат по данной стороне.

8. Постройте квадрат по данной диагонали.

9. Постройте описанную около данного треугольника окружность.

10. Даны две прямые и точка. Проведите через точку такую секущую, чтобы часть ее, заключенная между этими прямыми, делилась данной точкой пополам.

11. Проведите прямую на расстоянии, равном a, от данной прямой.

12. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

13. Постройте вписанную в треугольник окружность.

14. Постройте ромб по высоте и длине стороны.

15. Постройте треугольник по двум сторонам и углу против одной из них.

16. Постройте треугольник ABC по сторонам BC и AC и разности углов $\angle B$ и $\angle A$.

17. Даны три точки. Провести через них параллельные прямые так, чтобы расстояния между ними были равны.

18. Внутри данного угла BCD дана точка A. Проведите прямую, проходящую через эту точку, так, чтобы она была серединой отрезка, полученного при пересечении сторон угла этой прямой.

19. Построить треугольник по основанию, высоте и радиусу описанной окружности.

20. Даны окружность и точка A. Проведите в окружности хорду данной длины так, чтобы она была видна под данным углом из точки A.

21. Даны две параллельные прямые. Проведите третью параллельную прямую так, чтобы данный треугольник ABC можно было поместить вершинами на всех трех параллельных прямых.

22. Найдите точку, равноотстоящую от данных двух точек и находящуюся на известном расстоянии от данной прямой.

23. Найдите на прямой AB точку, равноотстоящую от двух пересекающихся прямых MN и PQ.

24. Постройте треугольник ABC по данным высотам к двум сторонам и биссектрисе, проведенной к третьей стороне.

25. Проведите окружность, касательную к трем данным прямым.

26. Постройте квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки.

27. Постройте окружность, пересекающие три данные равные окружности по хордам данной одинаковой длины.

28. Даны три точки A, B и C. Постройте окружность так, чтобы она проходила через точку A, а точки B и C были серединами хорд, причем каждая хорда была бы определенной длины.

29. В окружности даны два радиуса. Проведите хорду, делящуюся этими радиусами на три равные части.

30. Даны окружность и точка A вне ее. Постройте прямую, проходящую через эту точку и пересекающую данную окружность в точках B и C, так, чтобы секущая делилась пополам.

31. В данную окружность вписать треугольник, два угла которого известны, а одна сторона которого проходит через данную точку M.

Занятие 5
АКСИОМЫ ПОСТРОЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные теоретические сведения

Инструментальные аксиомы построений в пространстве:

1) аксиома линейки:

– через две различные точки построим прямую;

– через две различные точки построим отрезок;

– построим луч, исходящий из одной данной точки и проходящий через другую точку;

2) аксиома плоскографа:

– через три различные точки, не лежащие на одной прямой, построим плоскость;

– через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость;

– построим плоскость через прямую и точку, не лежащую на этой прямой;

– построим плоскость через две параллельные прямые;

3) аксиома сферографа:

– построим сферу с центром в данной точке и проходящую через другую точку;

– построим сферу с центром в данной точке и с радиусом, равным данному отрезку.

Базовые задачи

1. В пространстве даны четыре произвольные точки. Проведите через них все возможные прямые. Сколько решений имеет данная задача?

2. В пространстве даны четыре произвольные точки. Проведите через них все возможные плоскости. Сколько решений имеет данная задача?

3. В пространстве даны три точки. Проведите через них все возможные окружности. Сколько решений имеет данная задача?

4. Как могут быть расположены эти сферы?

5. Дан отрезок и точка, не лежащая на этом отрезке. Проведите сферу с центром в данной точке и радиусом, равным этому отрезку.

Задачи для самостоятельной работы

1. Решите базовую задачу 1 для пяти точек.

2. Каким образом могут быть расположены прямые из предыдущей задачи?

2. Пусть точка A пространства неподвижна, а точка B свободно меняет свое положение. Опишите множество прямых, проходящих через точки A и B.

3. Решите базовую задачу 2 для пяти точек.

4. Пусть точки A и B плоскости неподвижны, а точка C свободно меняет свое положение. Опишите множество плоскостей, проходящих через эти точки.

5. В условиях базовой задачи 5 опишите множество окружностей, получающихся при изменении длины отрезка.

6. В условиях базовой задачи 5 опишите множество окружностей, полученных в случае, если центр окружности меняет свое положение.

Занятие 6

БАЗОВЫЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные теоретические сведения

Базовые построения:

1) построить точку, принадлежащую построенной фигуре;

2) построить точку, не принадлежащую построенной фигуре;

3) построить любое конечное число точек пересечения двух построенных фигур;

4) можно построить линию пересечения двух плоскостей;

5) можно построить линию пересечения двух сфер;

6) можно построить линию пересечения сферы и плоскости.

Базовые задачи

1. На плоскости даны пять точек. Через три из них проведите плоскость. Постройте сферу с центром в четвертой точке, проходящую через пятую. Определите, существуют ли точки пересечения сферы и плоскости.

2. В условиях предыдущей задачи как нужно изменить положение точек, чтобы пересечение сферы и плоскости а) существовало; б) отсутствовало?

3. Можно ли расположить точки из задачи 1 так, чтобы плоскость касалась сферы?

4. В пространстве построена сфера. Выберите точку на сфере. Выберите точку, не лежащую на сфере. Проведите сферу, проходящую через одну из выбранных точек, с центром в другой точке. Пересекаются ли две построенные окружности?

5. В пространстве построена прямая. Выберите точку на прямой. Выберите две точки вне прямой. Соедините выбранные точки прямыми. Пересекаются ли построенные прямые и отрезок?

6. В условиях предыдущей задачи проведите плоскость. Будут ли пересекаться плоскость и отрезок?

6. Можно ли изменить положение точек так, чтобы плоскость не пересекала отрезок?

Задачи для самостоятельной работы

1. В базовой задаче 4 можно ли изменить положение точек так, чтобы сферы не пересекались?

2. В пространстве построена прямая. Выберите точку, лежащую на прямой, а также точку, не лежащую на ней. Проведите сферу с центром в одной из точек, проходящую через другую точку. Пересекаются ли сфера и прямая?

3. Можно ли изменить положение точек так, чтобы сфера и прямая не пересекались?

4. В пространстве проведена сфера. Через ее центр проведена прямая. Пересекает ли построенная прямая данную сферу?

5. Дан отрезок AB. Постройте сферу с центром в точке A и радиусом AB. Постройте сферу с центром в точке B и радиусом AB. Пересекаются ли данные сферы?

6. Дана плоскость. Выберите точку вне плоскости. Можно ли построить сферу так, чтобы она а) пересекала плоскость; б) не пересекала плоскость?

7. Дана плоскость. Выберите точки по одну сторону от плоскости. Постройте прямую, проходящую через эти точки. Пересекает ли прямая данную плоскость?

Задание 7

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базовые задачи

1. Построение плоскости, проходящей через середину данного отрезка и перпендикулярной к нему.

Решение.

Дано. Две произвольные точки пространства A и B, соединенные отрезком.

Анализ. Предположим, искомая плоскость построена. Обозначим через O середину отрезка AB. Выберем произвольную точку X этой плоскости. Соединим эту точку с точкой O. Прямые AB и OX перпендикулярны. Тогда прямоугольные треугольники XOA и XOB равны по двум катетам. Следовательно, данная точка равноудалена от точек A и B. Множества точек, равноудаленные от заданных, могут быть построены с помощью сфер с центрами в этих точках.

Для того чтобы построенные сферы заведомо пересекались, радиус каждой из них должен быть больше половины отрезка AB. В таком случае в качестве величины радиуса выгоднее брать саму длину отрезка AB.

Построение.

1. Построим сферы $\Omega_1(A, AB)$ и $\Omega_2(B, AB)$.

2. Построим окружность $\omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

3. Построим три различные точки X, Y, Z, принадлежащие окружности ω.

4. Через три точки X, Y, Z проведем плоскость α.

α – искомая.

Доказательство. Непосредственно из построения следует, что все точки окружности ω равноудалены от концов отрезка AB.

Соединим точки X и Y с точкой O. Пусть $\omega \cap XO = X'$. Рассмотрим четырехугольник $AXBX'$, который является ромбом. Тогда диагонали XO и AB перпендикулярны. Аналогично можно показать, что YO перпендикулярна AB. AB перпендикулярна к двум прямым XO, YO, лежащим в плоскости α. Следовательно, $AB \perp \alpha$ (рисунок 16).

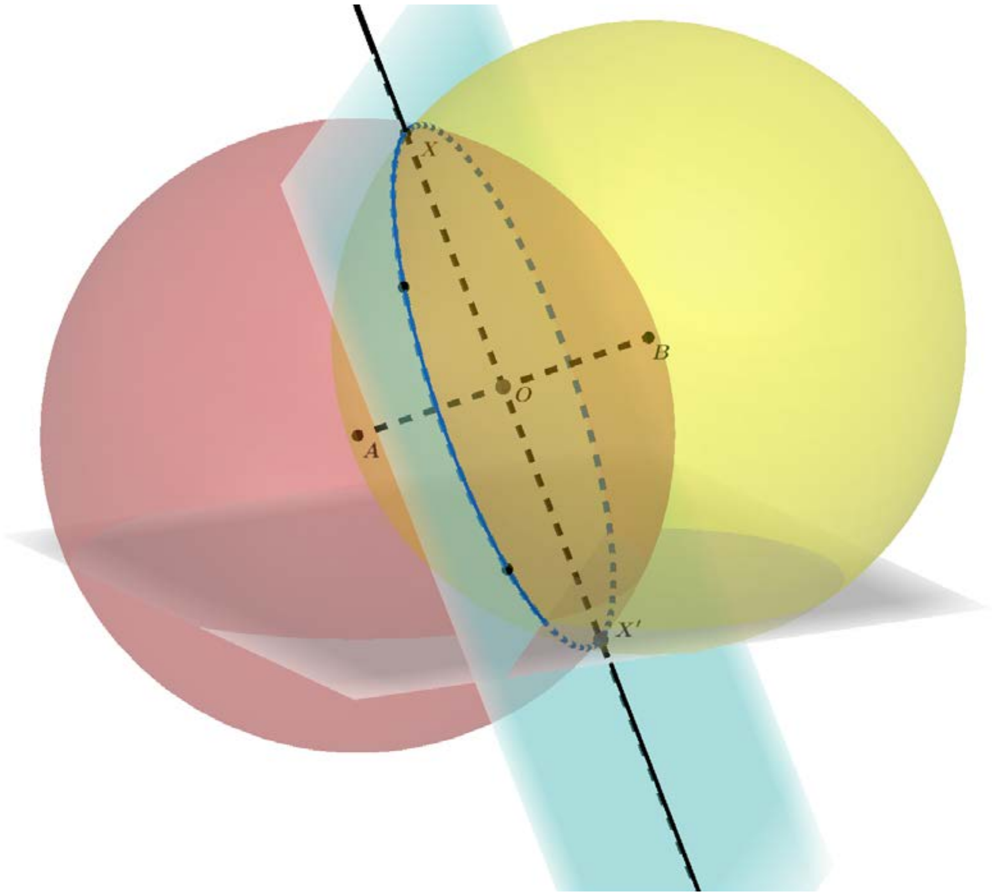

Рисунок 16

Исследование. Две сферы пересекаются только по одной окружности. Следовательно, существует единственная плоскость, проходящая через пересечение двух сфер. Сферы с такими центрами и радиусами всегда пересекаются. Таким образом, построенная плоскость α всегда существует и единственная.

2. Построение плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через данную точку (точка лежит на прямой).

Решение.

Дано. Прямая a, точка A, лежащая на данной прямой.

Анализ. Предположим, что задача решена и плоскость построена. Построение перпендикулярной плоскости, равноудаленной от двух заданных точек, известно. Тогда, чтобы эта плоскость проходила через данную точку A, достаточно найти две равноудаленные точки, лежащие на прямой a.

Построение.

1. $\Omega(A, r)$, где r – некоторое число.

2. $\Omega \cap a = \{X, Y\}$.

3. Проведем плоскость α перпендикулярно отрезку XY через его середину.

Плоскость α – искомая.

Доказательство. По построению плоскость перпендикулярна к прямой a. Так как A является серединой отрезка XY, то плоскость проходит через эту точку.

Исследование. Так как перпендикуляр к плоскости единственный, то задача имеет единственное решение.

3. Построение плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через данную точку.

Решение.

Дано. Плоскость α, точка $A \notin \alpha$.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 17).

По признаку параллельности двух плоскостей известно, что если пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

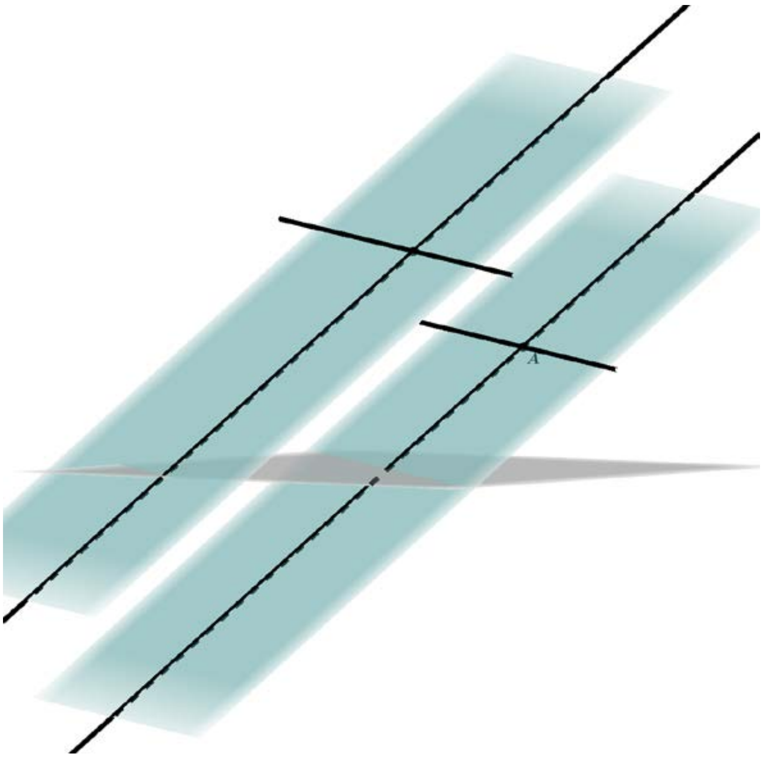

Рисунок 17

Построение.

1. Выберем в плоскости α три произвольные точки X, Y, Z.

2. Проведем прямые XY, XZ.

3. Построим прямые $AY' \parallel XY$, $AZ' \parallel XZ$.

4. Через эти две прямые проведем плоскость β.

β – искомая.

Доказательство. По построению $AY' \parallel XY$, $AZ' \parallel XZ$, по признаку прямые параллельны, а точка принадлежит β.

Исследование. В силу единственности и существования параллельных прямых задача всегда имеет единственное решение.

Задачи для самостоятельной работы

1. Построение середины данного отрезка.

2. Построение на данной прямой отрезка, равного данному.

3. В данной плоскости провести перпендикуляр к данной прямой через точку, лежащую на этой прямой.

4. Опустить перпендикуляр на данную прямую из точки, не лежащей на этой прямой.

5. Построение плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через данную точку (точка лежит на прямой).

6. Построение плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через данную точку (точка не лежит на прямой).

7. Построение линейного угла, равного данному линейному углу.

8. Построение двугранного угла, равного данному линейному углу.

9. Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку, не лежащую на заданной прямой.

10. Построение биссектрисы угла.

11. Построение биссекторной плоскости для данного двугранного угла.

12. Деление отрезка в данном отношении $m : n$.

13. Построение прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через данную точку (точка лежит в плоскости).

14. Построение прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через данную точку (точка не лежит в плоскости).

15. Построение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной к данной плоскости (прямая лежит в данной плоскости).

16. Построение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной к данной плоскости (прямая пересекает данную плоскость).

17. Построение прямой, перпендикулярной к данной плоскости и проходящей через данную прямую (прямая параллельна плоскости).

Занятие 8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базовые задачи

1. Постройте плоскость, проходящую через одну и параллельную другой из скрещивающихся прямых.

2. Через данную точку, взятую на прямой a, провести две взаимно перпендикулярные прямые, одновременно перпендикулярные к прямой a. Сколько решений имеет эта задача?

3. Через данную точку, взятую на плоскости α, провести две взаимно перпендикулярные плоскости, одновременно перпендикулярные к плоскости α. Сколько решений имеет задача?

4. Через данную точку P провести плоскость, образующую с плоскостями α и β равные двугранные углы.

5. На прямой a найти точку, равноотстоящую от двух данных точек A и B, не лежащих на прямой a.

Задачи для самостоятельной работы

1. Через данную прямую проведите плоскость, параллельную другой данной прямой.

2. Через данную прямую проведите плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

3. Проведите прямую, перпендикулярную каждой из двух данных скрещивающихся прямых и пересекающую каждую из них.

4. Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым.

5. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат соответственно на двух данных скрещивающихся прямых.

6. Найдите ГМТ пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

7. Найдите ГМТ пространства, находящихся на данном расстоянии от данной плоскости.

8. Найдите ГМТ пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей.

9. Найдите ГМТ пространства, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

10. Даны прямая a и точка A вне ее. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на все возможные проходящие через прямую a плоскости.

11. Даны плоскость, точка A на ней и точка B вне ее. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки B' на все возможные лежащие в данной плоскости и проходящие через точку A прямые (AB – наклонная к плоскости).

12. На прямой AB найти точку, равноотстоящую от точки A и от данной точки M.

13. Постройте касательную плоскость к данной сфере.

14. Через данную точку A провести сферу таким образом, чтобы она касалась другой сферы с центром в точке O в данной на ней точке M.

15. Построить правильный тетраэдр, если известен радиус вписанного в него шара.

16. Построить тетраэдр, если известны длины его сторон.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аргунов, Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – Москва : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1957. – 268 с.

2. Горшкова, Л. С. Геометрические построения: учебное пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов / Л. С. Горшкова, Е. В. Марина. – Пенза: Изд-во ПГПУ имени В. Г. Белинского, 2008. – 140 с.

3. Далингер, В. А. Геометрия: планиметрические задачи на построение: учебное пособие для вузов / В. А. Далингер. – Москва : Юрайт, 2021. 155 с. – URL: https://urait.ru/bcode/473822 (дата обращения: 28.03.2022).

4. Далингер, В. А. Геометрия: стереометрические задачи на построение: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. – Москва : Юрайт, 2021. – URL: https://urait.ru/bcode/473295 (дата обращения: 28.03.2022).

5. Костовский, А. Н. Геометрические построения одним циркулем на плоскости и одним лишь сферографом в пространстве / А. Н. Костовский. – Москва : Наука, 1989. – 108 с.

6. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян [и др.]. – Москва : Просвещение, 2018. – 256 с.

7. Орленко, М. И. Решение геометрических задач на построение: пособие для учителей средней школы / М. И. Орленко. – Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, 1958. – 440 с.

8. Подаева, Н. Г. Геометрические задачи на построение в электронной образовательной среде как средство развития понятийных психических структур обучающихся: социокультурный подход / Н. Г. Подаева, П. А. Агафонов // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Гуманитарные науки. – 2020. – № 12-2. – С. 103–109.

9. Подаева, Н. Г. Развитие деятельности одаренных школьников по овладению геометрическими понятиями в образных структурах / Н. Г. Подаева, М. В. Подаева, П. А. Агафонов // Психология образования в поликультурном пространстве. – 2021. – № 2 (54). – С. 89–96.

10. Подаева, Н. Г. Формирование понятий в процессе обучения геометрии школьников в электронной образовательной среде / Н. Г. Подаева, М. В. Подаева, П. А. Агафонов // Концепт : научно-методический электронный журнал. – 2019. – № 6. – С. 10–25. – URL: https://e-koncept.ru/2019/June.htm (дата обращения: 28.03.2022).

11. Семушин, А. Д. Методика обучения решению задач на построение в пространстве / А. Д. Семушин. – Москва : Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1959. – 156 с.

12. Энциклопедия элементарной математики. Книга 4. Геометрия. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1953. – 568 с.