МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ В. Г. КОРОЛЕНКО»

ВОПРОСЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование

(с двумя профилями подготовки) математических профилей

Учебное электронное издание

на компакт-диске

Глазов

ГГПИ

2022

ISBN 978-5-93008-382-8

УДК 372.851
ББК 74.262.21
В74

Рекомендовано научно-методическим советом
ФГБОУ ВО «ГГПИ им. В. Г. Короленко» в качестве учебно-методического пособия.
Протокол № 11 от 28.06.2022.

Автор-составитель – канд. пед. наук Н. В. Леонтьева

Рецензент – канд. пед. наук, доцент кафедры математики и информатики ФГБОУ ВО «ГГПИ им. В. Г. Короленко» Н. Г. Дюкина

В74 Вопросы обучения школьников решению олимпиадных задач и задач повышенной трудности по математике : учебно-методическое пособие для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) математических профилей / автор-составитель Н. В. Леонтьева. – Глазов : Глазовский государственный педагогический институт, 2022. – 1,0 Мб. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), одним из профилей которого является Математика. Предложенные задания к практическим занятиям по курсу «Вопросы обучения решению олимпиадных задач и задач повышенной сложности по математике» включают в себя базовые задания и задания для самостоятельной работы студентов.

Пособие может быть использовано для подготовки к лекционным, практическим занятиям, зачетам и для самостоятельной работы студентов. Оно будет полезно школьникам и учителям для подготовки к занятиям.

Системные требования: процессор с тактовой частотой 1,3 ГГц и выше; 256 Мб RAM; свободное место на HDD 1,0 Мб; Windows 2000/XP/7/8/10; Adobe Acrobat Reader; дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше; мышь.

Учебное электронное издание
на компакт-диске

ВОПРОСЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки) математических профилей

Технический редактор, корректор *М. В. Пермякова*
Оригинал-макет: *П. А. Горбушин*

Подписано к использованию 01.09.2022. Объем издания 1,0 Мб.
Тираж 8 экз. Заказ № 2810 – 2022.

ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко»
427621, Россия, Удмуртская Республика, г. Глазов, ул. Первомайская, д. 25
Тел./факс: 8 (34141) 5-60-09; e-mail: izdat@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Основные теоретические сведения

Свойства неравенств.

1. $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.

2. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

3. $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

4. $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

5. $a > b + c, c > 0 \Rightarrow a > b$.

6. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$.

7. $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$.

Доказать неравенство – показать, что неравенство выполняется при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

К методам доказательства неравенств относят:

1. Аналитический метод заключается в приведении данного по условию неравенства к некоторому известному неравенству с помощью равносильных преобразований.

2. Синтетический метод предполагает такое преобразование некоторого известного неравенства к данному по условию с помощью равносильных преобразований.

3. Метод математической индукции.

Основные замечательные неравенства.

1. $A^2 \geq 0$, где A – любое число.

2. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$. Равенство достигается только при условии, что $a = b$.

3. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, $a_i \geq 0, i = 1,2,\dots,n$. Равенство достигается при условии, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. $A + \frac{1}{A} \geq 2, A \geq 0$.

5. $a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$ при любых a, b.

Базовые задачи

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a \geq 0, b \geq 0$.

2. $A + \frac{1}{A} \geq 2, A > 0$.

3. $a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$ при любых a, b.

4. Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения $a^2 + 1, \frac{1}{3a+4}$.

5. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4, a > 0, b > 0$.

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1

1. $a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \geq 4, a > 0$.

2. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, a > 0, b > 0, c > 0$.

3. Известно, что $2 < a < 4$. Оцените величину $a^2 + \frac{2}{a^2+1}$.

4. $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1, |a| \leq 1, |b| \leq 1$.

5. Оцените значение a, если известно, что $a + b = 3, b < 7$.

Вариант 2

1. $a^3 + 3a + \frac{1}{a^6} \geq 5, a > 0$.

2. $\left(1 + \frac{bc}{ad}\right)\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)\left(1 + \frac{ab}{cd}\right) \geq 16, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

3. Известно, что $1 < a < 3$. Оцените величину $3a + \frac{1}{a^2-1}$.

4. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

5. Оцените значение a, если известно, что $a + b < 5, b > 1$.

Вариант 3

1. $2a^3 + a + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3} \geq 6, a > 0.$

2. $\frac{ad+bc}{bd} + \frac{bc+ad}{ac} \geq 4, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0.$

3. Известно, что $2 < a < 5$. Оцените величину $a^2 - \frac{3}{a^2+3a}$.

4. $(a + b + c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$

5. Оцените значение a, если известно, что $a + b > 3, b < 2.$

Вариант 4

1. $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geq 8, a > 0.$

2. $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq 2, a > 0, b > 0.$

3. Известно, что $2 < a < 6$. Оцените величину $\frac{1}{a} - 3a^2$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.$

5. Оцените значение a, если известно, что $a + b = 7, 2 \leq b < 3.$

Вариант 5

1. $a^7 + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a} \geq 5, a > 0.$

2. $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8, a > 0, b > 0, c > 0.$

3. Известно, что $1 < a < 5$. Оцените величину $\frac{3}{2a-4} - a^2$.

4. $\sqrt{(a + b)(c + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{dc}, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0.$

5. Оцените значение a, если известно, что $a + b > 8,\ 1 < b < 7.$

Занятие 2

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ 5–6 КЛАССОВ

Базовые задачи

1. Для покупки 10 воздушных шариков у Ани не хватает 50 руб. Если она купит 8 шариков, то у нее останется 40 руб. Сколько денег было у Ани? Сколько стоил один шарик?

2. Если к деньгам Сергея прибавить еще 70 % этих денег, то получится 3 400 руб. Сколько денег у Сергея?

3. До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих друзей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться ко двору, и молвили они:

Илья Муромец: Змея убил Добрыня Никитич.

Добрыня Никитич: Змея убил Алеша Попович.

Алеша Попович: Я убил Змея.

При этом оказалось, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил Змея?

4. Десяти собакам и кошкам дали 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, каждой кошке – 5 галет. Сколько было собак и сколько было кошек?

5. Как разложить гирьки весом 1, 2, …, 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?

6. По дороге едут автомобили: на запад – «москвич» и «жигули» с равными между собой скоростями, а на восток – «мерседес» и БМВ с равными между собой скоростями. «Москвич» встретился с БМВ в 12:00, «жигули» с БМВ – в 15:00, «москвич» с «мерседесом» – в 14:00. Когда встретились «жигули» с «мерседесом»?

7. Банка с соком стоит 30 руб., а сок стоит на 25 руб. дороже бутылки. Сколько стоит бутылка?

8. Заяц Степан меняет кочан капусты на морковку. У зайца Пети не хватает семи морковок, а у зайчихи Маши одной морковки. Тогда они сложили свои морковки. Но их также не хватило, чтобы получить кочан капусты. На сколько морковок меняет Степан кочан капусты?

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Расстояние между двумя автомобилями, едущими по шоссе, 40 км. Первая машина двигается со скоростью 55 км/ч, вторая – 45 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через час?

2. В магазине есть розы пяти цветов: красный, желтый, белый, розовый и бордовый. Сколько способов составить букет из пяти цветков, если в нем должно быть два цветка одного цвета и три другого?

3. У Зимушки были бочки с солеными, сушеными и маринованными снежками. Бочек с солеными снежками было на 20 % больше, чем бочек с маринованными, а бочек с сушеными – на 10 % меньше, чем бочек с солеными. Сколько всего бочек было у Зимушки, если бочек сушеных снежков у нее 18?

4. Три курицы снесли за три дня три яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней?

5. Нарисовать 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 21 точка была вершиной нарисованных квадратов.

6. Сколько треугольников изображено на рисунке 1?

7. Мастеру принесли на реставрацию квадратный ковер. Помогите ему восстановить орнамент, если он симметричен относительно двух осей, проходящих через центр ковра (рисунок 2).

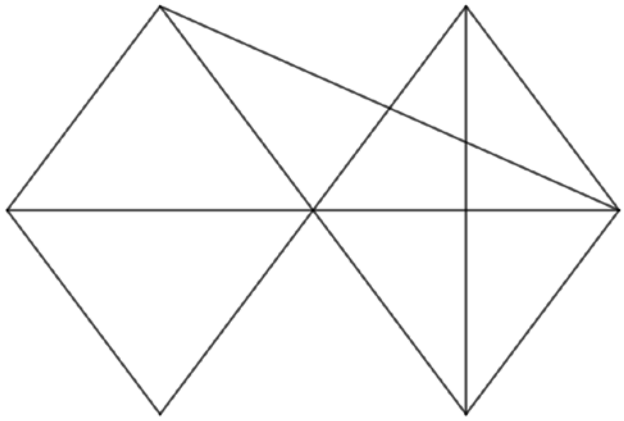

Рисунок 1

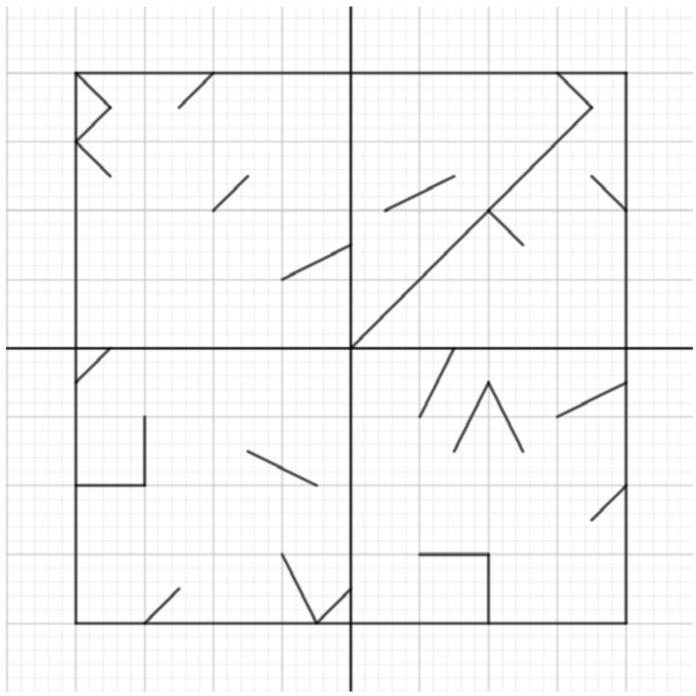

Рисунок 2

8. Шерлок Холмс допрашивал Джона, Билли и Джека в связи с кражей бриллианта. Они сказали следующее:

Джон: Бриллиант украл Джек.

Билли: Я украл бриллиант.

Джек: Билли украл бриллиант.

Кто совершил кражу, если только один сказал правду, а двое солгали?

9. У Паши в книжном шкафу 12 низких и высоких полок. На каждой низкой полке стоит по 10 книг, а на каждой высокой – по 15. Паша посчитал, что у него всего 145 книг. Сколько низких и сколько высоких полок в шкафу?

10. Как разложить штанговые блины весом 1, 2, …, 9 кг в три ящика так, чтобы в первом было два блина, во втором – три, в третьем – четыре, а суммарный вес блинов в ящиках был одинаковым?

11. Олег купил 3 альбома для марок. Все альбомы, кроме первого, стоят в сумме 512 руб., без второго – 487 руб., без третьего – 319 руб. Сколько стоит каждый альбом?

12. Плеер с наушниками стоит 1 350 руб., а сам плеер стоит на 950 руб. дороже наушников. Сколько стоят наушники?

13. На полке стоят чайные пары. Сначала взяли четвертую часть всех пар без трех, а потом треть оставшихся чайных пар. На полке осталось 12 чайных пар. Сколько чайных пар было на полке?

14. Во сколько раз увеличится трехзначное число, если справа к нему приписать такое же трехзначное число?

15. Решите ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ТУЗИК}\\ \text{ТУЗИК}\end{array}\\ \hline \text{КАРТУЗ}\end{array}$$

Вариант 2

1. Расстояние между двумя автомобилями, едущими по шоссе, 35 км. Первая машина двигается со скоростью 60 км/ч, вторая – 45 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через час?

2. В магазине есть розы пяти цветов: красный, желтый, белый, розовый и бордовый. Сколько способов составить букет из пяти цветков, если в нем должно быть четыре цветка одного цвета и один другого?

3. У Зимушки были бочки с солеными, сушеными и маринованными снежками. Бочек с солеными снежками было на 20 % больше, чем бочек с маринованными, а бочек с сушеными – на 10 % меньше, чем бочек с солеными. Сколько бочек соленых снежков было у Зимушки, если всего у нее было 82 бочки?

4. Пять куриц снесли за пять дней пять яиц. Сколько яиц снесут 15 кур за 15 дней?

5. Нарисовать 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 21 точка была вершиной нарисованных квадратов.

6. Сколько четырехугольников изображено на рисунке 1?

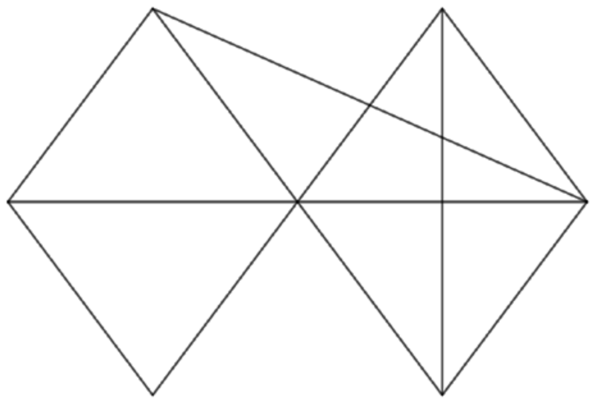

Рисунок 1

7. Мастеру принесли на реставрацию квадратный ковер. Помогите ему восстановить орнамент, если он симметричен относительно двух осей, проходящих через центр ковра (рисунок 2).

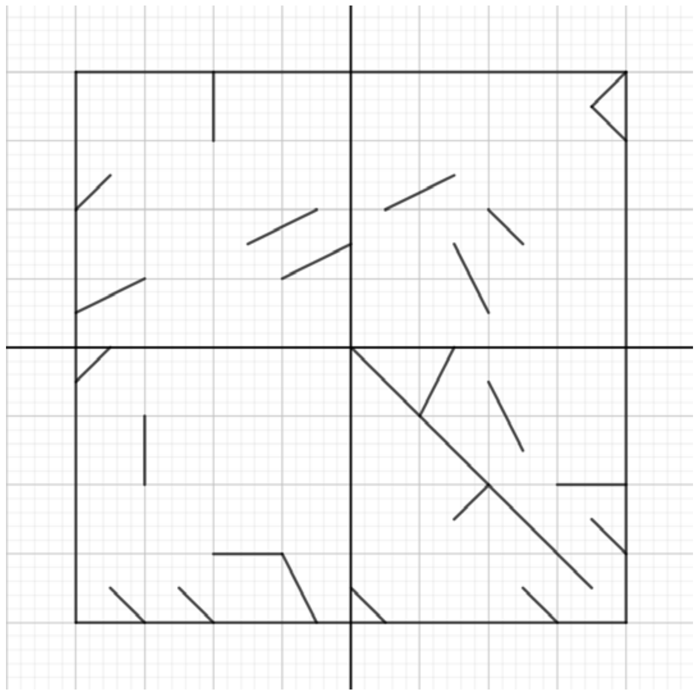

Рисунок 2

8. Заблудился царь Горох и встретил Змея Горыныча. Каждая голова сказала царю:

1-я голова: Прямо пойдешь – в болото попадешь. Налево пойдешь – домой попадешь.

2-я голова: Прямо пойдешь – в дремучий лес забредешь. Направо пойдешь – в болото попадешь.

3-я голова: Налево пойдешь – в болоте сгинешь. Направо пойдешь – домой попадешь.

Куда пойти царю, если одна голова оба раза сказала правду, другая оба раза солгала, а еще одна голова сказала в первый раз правду, а затем – ложь?

9. У Паши в книжном шкафу 12 низких и высоких полок. На каждой низкой полке стоит по 10 книг, а на каждой высокой – по 15. Паша посчитал, что у него всего 140 книг. Сколько низких и сколько высоких полок в шкафу?

10. Как разложить пакеты с чаем весом 10, 20, …, 90 г в три шкатулки так, чтобы в первой было два пакета, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес пакетов в шкатулках был одинаковым?

11. Олег купил 3 альбома для марок. Все альбомы, кроме первого, стоят в сумме 489 руб., без второго – 617 руб., без третьего – 494 руб. Сколько стоит каждый альбом?

12. Тетрадь с обложкой стоит 135 руб., а сама тетрадь стоит на 95 руб. дороже обложки. Сколько стоит обложка?

13. На полке стоят чайные пары. Сначала взяли половину всех пар без одной, а потом треть оставшихся чайных пар. На полке осталось 8 чайных пар. Сколько чайных пар было на полке?

14. Во сколько раз увеличится трехзначное число, если справа к нему приписать такое же трехзначное число?

15. Решите ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r}\text{ТУЗИК}\\ \text{ТУЗИК}\end{array}\\
\hline
\text{КАРТУЗ}
\end{array}
$$

Вариант 3

1. Расстояние между двумя автомобилями, едущими по шоссе, 20 км. Первая машина двигается со скоростью 65 км/ч, вторая – 55 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через час?

2. В магазине есть розы пяти цветов: красный, желтый, белый, розовый и бордовый. Сколько способов составить букет из семи цветков, если в нем должно быть три цветка одного цвета и четыре другого?

3. У Зимушки были бочки с солеными, сушеными и маринованными снежками. Бочек с солеными снежками было на 20 % больше, чем бочек с маринованными, а бочек с сушеными – на 10 % меньше, чем бочек с солеными. Сколько бочек сушеных снежков было у Зимушки, если всего у нее было 82 бочки?

4. Четыре землекопа за четыре дня выкопали 40 метров канавы. Сколько метров выкопают 8 землекопов за восемь дней?

5. Нарисовать 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 21 точка была вершиной нарисованных квадратов.

6. Сколько треугольников изображено на рисунке 1?

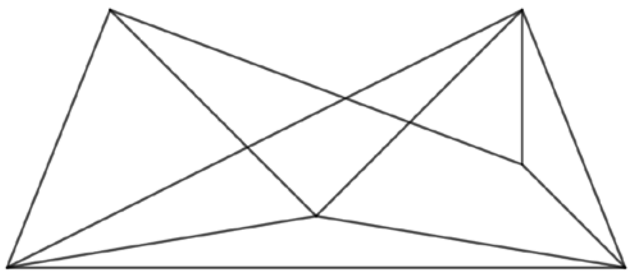

Рисунок 1

7. Мастеру принесли на реставрацию квадратный ковер. Помогите ему восстановить орнамент, если он симметричен относительно двух осей, проходящих через центр ковра (рисунок 2).

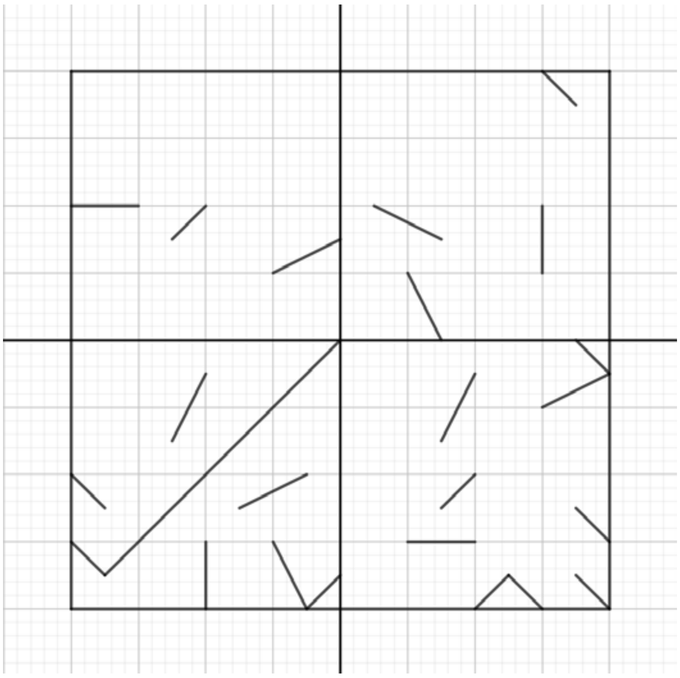

Рисунок 2

8. Комиссар полиции допрашивал Этьена, Франсуа и Жана, подозреваемых в ограблении банка. Они сказали следующее:

Этьен: Банк ограбил Жан.

Франсуа: Я ограбил банк.

Жан: Франсуа ограбил банк.

Кто совершил кражу, если только один сказал правду, а двое солгали?

9. У Паши в книжном шкафу 15 низких и высоких полок. На каждой низкой полке стоит по 10 книг, а на каждой высокой – по 15. Паша посчитал, что у него всего 180 книг. Сколько низких и сколько высоких полок в шкафу?

10. Как разложить штанговые блины весом 1, 2, …, 9 кг в три ящика так, чтобы в первом было два блина, во втором – три, в третьем – четыре, а суммарный вес блинов в ящиках был одинаковым?

11. Олег купил 3 альбома для марок. Все альбомы, кроме первого, стоят в сумме 812 руб., без второго – 762 руб., без третьего – 684 руб. Сколько стоит каждый альбом?

12. Чай в шкатулке стоит 450 руб., а чай стоит на 300 руб. дороже шкатулки. Сколько стоит чай без шкатулки?

13. На полке стоят чайные пары. Сначала взяли третью часть всех пар без трех, а потом две трети оставшихся чайных пар. На полке осталось 7 чайных пар. Сколько чайных пар было на полке?

14. Во сколько раз увеличится трехзначное число, если справа к нему приписать такое же трехзначное число?

15. Решите ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

$$\begin{array}{r} \text{ТУЗИК} \\ +\;\; \text{ТУЗИК} \\ \hline \text{КАРТУЗ} \end{array}$$

Вариант 4

1. Расстояние между двумя автомобилями, едущими по шоссе, 25 км. Первая машина двигается со скоростью 60 км/ч, вторая – 40 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через час?

2. В магазине есть розы пяти цветов: красный, желтый, белый, розовый и бордовый. Сколько способов составить букет из семи цветков, если в нем должно быть два цветка одного цвета и пять другого?

3. У Зимушки были бочки с солеными, сушеными и маринованными снежками. Бочек с солеными снежками было на 20 % больше, чем бочек с маринованными, а бочек с сушеными – на 10 % меньше, чем бочек с солеными. Сколько всего бочек было у Зимушки, если бочек сушеных и маринованных снежков у нее 52?

4. Пять землекопов за пять дней выкопали 50 метров канавы. Сколько метров выкопают 15 землекопов за 15 дней?

5. Нарисовать 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 21 точка была вершиной нарисованных квадратов.

6. Сколько четырехугольников изображено на рисунке 1?

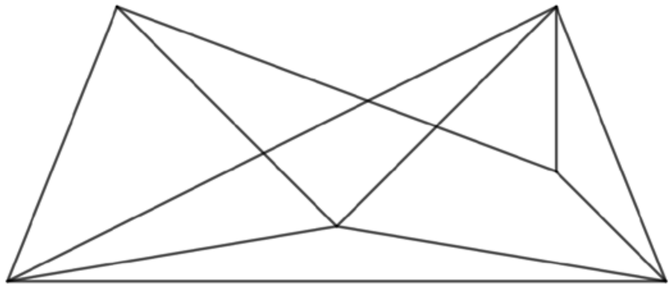

Рисунок 1

7. Мастеру принесли на реставрацию квадратный ковер. Помогите ему восстановить орнамент, если он симметричен относительно двух осей, проходящих через центр ковра (рисунок 2).

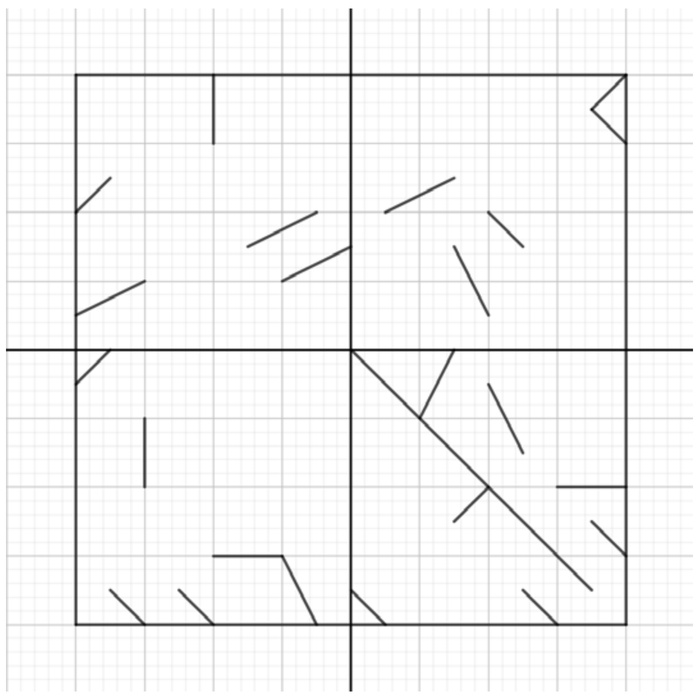

Рисунок 2

8. Заблудился Чебурашка и встретил Знайку, Незнайку и Гуньку. Каждый из них сказал следующее:

1-й малыш: Прямо пойдешь – к речке выйдешь. Налево пойдешь – домой попадешь.

2-й малыш: Прямо пойдешь – в заросли крапивы забредешь. Направо пойдешь – к речке попадешь.

3-й малыш: Налево пойдешь – к речке выйдешь. Направо пойдешь – домой попадешь.

Куда пойти Чебурашке, если Знайка оба раза сказал правду, Незнайка оба раза солгал, а Гунька сказал в первый раз правду, а затем – ложь?

9. У Паши в книжном шкафу 14 низких и высоких полок. На каждой низкой полке стоит по 10 книг, а на каждой высокой – по 15. Паша посчитал, что у него всего 170 книг. Сколько низких и сколько высоких полок в шкафу?

10. Как разложить штанговые блины весом 1, 2, …, 9 кг в три ящика так, чтобы в первом было два блина, во втором – три, в третьем – четыре, а суммарный вес блинов в ящиках был одинаковым?

11. Олег купил 3 альбома для марок. Все альбомы, кроме первого, стоят в сумме 527 руб., без второго – 618 руб., без третьего – 495 руб. Сколько стоит каждый альбом?

12. Чашка с блюдцем стоит 240 руб., а чашка стоит на 100 руб. дороже блюдца. Сколько стоит блюдце?

13. На полке стоят чайные пары. Сначала взяли четвертую часть всех пар без трех, а потом половину оставшихся чайных пар. На полке осталось 12 чайных пар. Сколько чайных пар было на полке?

14. Во сколько раз увеличится трехзначное число, если справа к нему приписать такое же трехзначное число?

15. Решите ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ТУЗИК}\\ \text{ТУЗИК}\end{array}\\ \hline \text{КАРТУЗ}\end{array}$$

Вариант 5

1. Расстояние между двумя автомобилями, едущими по шоссе, 30 км. Первая машина двигается со скоростью 65 км/ч, вторая – 50 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через час?

2. В магазине есть розы пяти цветов: красный, желтый, белый, розовый и бордовый. Сколько способов составить букет из семи цветков, если в нем должно быть шесть цветков одного цвета и один другого?

3. У Зимушки были бочки с солеными, сушеными и маринованными снежками. Бочек с солеными снежками было на 20 % больше, чем бочек с маринованными, а бочек с сушеными – на 10 % меньше, чем бочек с солеными. Сколько всего бочек было у Зимушки, если бочек сушеных и соленых снежков у нее 57?

4. Семь фей за семь дней вырастили семь чудесных цветков. Сколько цветков вырастит 21 фея за 21 день?

5. Нарисовать 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 21 точка была вершиной нарисованных квадратов.

6. Сколько треугольников изображено на рисунке 1?

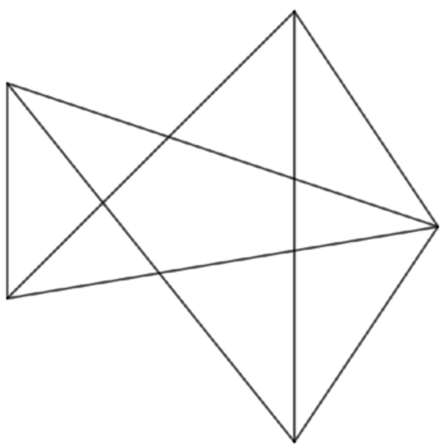

Рисунок 1

7. Мастеру принесли на реставрацию квадратный ковер. Помогите ему восстановить орнамент, если он симметричен относительно двух осей, проходящих через центр ковра (рисунок 2).

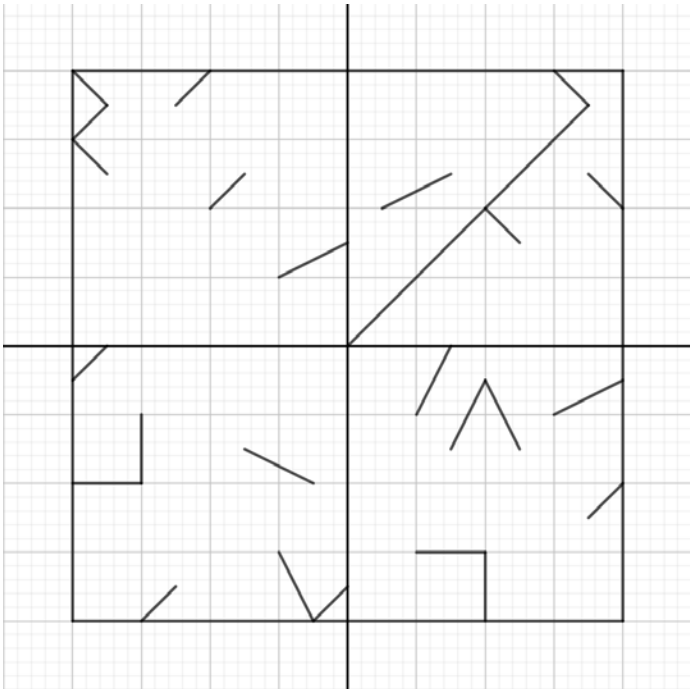

Рисунок 2

8. Кнопочка вышила на носовых платочках серого зайчика, рыжих белочку и лисичку. Она подарила эти платки Знайке, Незнайке и Гуньке. Известно, что Гуньке досталась не белочка, Знайке – не лисичка, а Незнайке – не рыжий зверек. Кому какой платок достался?

9. У Паши в книжном шкафу 15 низких и высоких полок. На каждой низкой полке стоит по 10 книг, а на каждой высокой – по 15. Паша посчитал, что у него всего 185 книг. Сколько низких и сколько высоких полок в шкафу?

10. Как разложить пакеты с чаем весом 10, 20, …, 90 г в три шкатулки так, чтобы в первой было два пакета, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес пакетов в шкатулках был одинаковым?

11. Олег купил 3 альбома для марок. Все альбомы, кроме первого, стоят в сумме 674 руб., без второго – 592 руб., без третьего – 616 руб. Сколько стоит каждый альбом?

12. Пенал с карандашами стоит 720 руб., а карандаши стоят на 460 руб. дороже пенала. Сколько стоят карандаши без пенала?

13. На полке стоят чайные пары. Сначала взяли третью часть всех пар без четырех, а потом четверть оставшихся чайных пар. На полке осталось 15 чайных пар. Сколько чайных пар было на полке?

14. Во сколько раз увеличится трехзначное число, если справа к нему приписать такое же трехзначное число?

15. Решите ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{ТУЗИК} \\ \text{ТУЗИК} \end{array} \\ \hline \text{КАРТУЗ} \end{array}$$

Дополнительные задачи

1. Крестьянин пришел к царю и попросил одно яблоко из царского сада. Царь ему разрешил. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором. Каждый забор имеет только одни ворота и около каждых ворот стоит страж. Подошел крестьянин к первому стражу и сказал: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». «Возьми, но при выходе должен будешь отдать мне половину яблок, что возьмешь, и еще одно», – поставил условие страж. Это же повторили ему второй и третий, которые охраняли другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин после того, как он отдаст положенные части трем стражам, а у него останется одно яблоко?

2. Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре будет вместе 100 лет?

3. Имеется два сосуда вместимостью 5 л и 7 л. Как с помощью таких сосудов налить 6 л?

4. Разместите 8 телят и 9 индюков в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и телята, и индюки, а число их ног равнялось 10.

5. Илья купил 3 стакана семечек, а Семен – 2 стакана. К ним присоединился Саша, и они разделили все семечки поровну. При расчете оказалось, что Саша должен уплатить товарищам 20 руб. Сколько денег из этой суммы должен получить Илья и сколько Семен?

6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились несколько аборигенов, и каждый заявил всем остальным: «Вы все – лжецы!» Сколько рыцарей было среди этих аборигенов?

7. Среднее арифметическое двух чисел равно 54. Одно число больше другого в 2 раза. Найдите эти числа.

8. Учитель достал из ящика стола 33 карточки с числами от 1 до 33. Сколько имеется среди них карточек, в номерах которых имеется цифра 1?

9. Найдите наибольшее целое число, которое при делении на 12 с остатком дает частное 19.

10. В ящике лежат 10 пар черных перчаток и 10 пар красных перчаток одного размера. Какое наименьшее число перчаток надо вытащить из ящика наугад, чтобы наверняка среди них были две перчатки одного цвета? (Перчатки могут надеваться на любую руку.)

11. В ящике лежат 10 пар черных, 10 пар красных и 10 пар синих перчаток одного размера. Какое наименьшее число перчаток надо вытащить из ящика наугад, чтобы наверняка среди них были две перчатки красного цвета? (Перчатки могут надеваться на любую руку.)

12. Вместо звездочек поставьте цифры так, чтобы сложение было выполнено правильно:

$$\begin{array}{r} 73*8 \\ +\quad **46* \\ 9*36 \\ \hline 97\,125 \end{array}$$

13. Однажды Незнайка со своими друзьями собирал яблоки. Нарвали они не очень много – меньше 80, но и не мало – больше 70. Разделили все яблоки поровну. Вдруг видят – Винни-Пух к ним бежит. Не беда, что из другой сказки.

Надо и его яблочком угостить. Каждый малыш отдал Винни-Пуху одно яблоко, и оказалось, что у всех опять яблок поровну. Сколько было малышей? Сколько яблок они собрали?

14. На столе стоит 8 стаканов. Из них 7 стоят правильно, а один перевернут вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно 6 любых стаканов. Можно ли все стаканы поставить правильно?

15. На складе имеются ножи и вилки. Число тех и других больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки вместе считать десятками или дюжинами, то в обоих случаях получается целое число десятков и целое число дюжин. Сколько было ножей и вилок на складе, если ножей было на 160 меньше, чем вилок?

Занятие 3
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Основные теоретические сведения

Алгоритм решения задачи линейной оптимизации:

1. Обозначить неизвестные величины переменными x и y.

2. Выразить через них оптимизируемую величину.

3. Выразить через x и y остальные условия задачи, что определяет систему ограничений. По умолчанию переменные считают неотрицательными.

4. Систему ограничений изображают в виде области на плоскости.

5. Определяют предельное положение прямой, изображающей оптимизируемую величину, в полученной области.

6. Находят координаты точки области, через которую проходит прямая оптимизации.

Базовые задачи

1. Кондитерский цех на одном и том же оборудовании производит печенье двух видов. Используя все оборудование, за день он может производить 60 центнеров печенья первого вида или 85 центнеров печенья второго вида. Ниже приведены себестоимость и отпускная цена одного печенья в рублях.

Товар	Себестоимость	Отпускная цена
1-го вида	9 000	12 000
2-го вида	8 000	12 000

Найдите, какую наибольшую прибыль может получить этот цех за день при условии, что будет использоваться все оборудование, будет продано все произведенное печенье и по договору с заказчиком должно производиться в день не менее 6 центнеров печенья каждого вида.

2. В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. На второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

3. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу – по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

4. Один из цехов фабрики, производящей пищевые полуфабрикаты, выпускает вареники со следующими видами начинки: картофельная и грибная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	**Себестоимость (за 1 тонну)**	**Отпускная цена (за 1 тонну)**	**Производственные возможности**
картофель	88 тыс. руб.	138 тыс. руб.	110 (тонн в месяц)
грибы	92 тыс. руб.	154 тыс. руб.	80 (тонн в месяц)

Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 44 тонн. Предполагая, что вся продукция цеха находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль (в млн рублей), которую может получить фабрика от производства вареников за 1 месяц.

5. Бизнесмен купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть одноместные номера площадью 16 квадратных метров каждый и двухместные номера площадью 20 квадратных метров каждый. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 812 квадратных метров. Бизнесмен может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Из соображений конкурентоспособности он может выбрать одну из двух ценовых линеек:

1) 3 200 руб. в сутки за одноместный номер и 3 800 руб. в сутки за двухместный номер;

2) 3 040 руб. в сутки за одноместный номер и 4 000 руб. в сутки за двухместный номер.

а) Сколько одноместных и сколько двухместных номеров должно быть в отеле для получения максимально возможного суточного дохода?

б) Какую наибольшую сумму (в рублях) может при этом заработать в сутки на своём отеле бизнесмен?

6. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется пять часов работы станка А и три часа работы станка Б, а для изготовления изделия второго типа требуется два часа работы станка А и четыре часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 150 часов в месяц, а станок Б – не более 132 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 300 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 200 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 300 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде А и 30 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде А и 9 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 360 часов в месяц, а стенд Б – не более 180 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

2. Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 15 часов работы цеха А и 10 часов работы цеха Б, а для изготовления изделия второго типа требуется 5 часов работы цеха А и 20 часов работы цеха Б (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех А может работать не более 150 часов в неделю, а цех Б – не более 100 часов в неделю. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 5000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 4000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную еженедельную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует еженедельно выпускать для получения этой прибыли.

Вариант 2

1. Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 450 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде А и 30 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде А и 9 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 400 часов в месяц, а стенд Б – не более 240 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

2. Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 30 часов работы цеха А и 20 часов работы цеха Б, а для изготовления изделия второго типа требуется 10 часов работы цеха А и 40 часов работы цеха Б (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех А может работать не более 600 часов в месяц, а цех Б – не более 400 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно выпускать для получения этой прибыли.

Вариант 3

1. Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 400 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде А и 30 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде А и 6 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 360 часов в месяц, а стенд Б – не более 205 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

2. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка А и 7 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 9 часов работы станка А и 3 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 162 часов в месяц, а станок Б – не более 136 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 9000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 6000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Вариант 4

1. Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 400 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде А и 30 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде А и 6 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 360 часов в месяц, а стенд Б – не более 205 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

2. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка А и 9 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 8 часов работы станка А и 4 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 208 часов в месяц, а станок Б – не более 144 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Вариант 5

1. Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 460 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде А и 24 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде А и 9 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 400 часов в месяц, а стенд Б – не более 260 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

2. Баржу грузоподъёмностью 180 тонн используют для перевозки контейнеров типов А и В. По условиям договора количество перевозимых контейнеров типа А должно составлять не более 75 % количества перевозимых контейнеров типа В. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 3 тонны и 3 млн руб., контейнера типа В – 7 тонн и 5 млн руб. соответственно. Найдите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, которые можно перевезти при данных условиях. Укажите число контейнеров типа А и число контейнеров типа В, которые нужно перевезти для получения наибольшей возможной суммарной стоимости.

Занятие 4
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Основные теоретические сведения

Задача с параметром – задача, содержащая в своем условии некоторую величину, значение которой неизвестно и может меняться в заданном промежутке.

Виды задач с параметрами:

1) требуется найти решение задачи при каждом значении параметра;

2) требуется найти такие значения параметра, при которых решение задачи удовлетворяет заданным условиям.

Методы решения задач с параметрами:

1) аналитический;

2) графический;

3) нестандартный.

Базовые задачи

1. При каждом значении параметра a решите уравнение

$$a^2x + 3 \leq 3ax - 2x + 4a.$$

2. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$2xa^2 - (5x + 2)a + 2x + 1 > 0.$$

3. При каждом значении параметра a решите уравнение

$$x^2 - 2ax + a^2 - 3a = 0.$$

4. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$ax^2 + a^2x - 3x - 3a \geq 0.$$

5. Решите систему линейных уравнений при всевозможных значениях параметра a

$$\begin{cases} x - ay + z = 1; \\ -ax + y + z = 2; \\ x + y - az = 3. \end{cases}$$

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|9x + 7a - 3| = |4x + 3a + 4|$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -8.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 - (a - 5)x^2 - 5ax = 0$ имеет ровно два различных корня.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $x^2 + 3x - 9a + 18 = 0$ меньше 10.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5ax + 7a} = 5x + 7$ имеет хотя бы один корень.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2 - (a^2 + 8)x + 8a)\sqrt{x + 3} = 0$ имеет ровно два различных корня.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $4(a - 3)x^2 - 2(2a + 1)x + a > 0$ принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$$

имеет решения.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

3. Постройте график функции $y = \frac{(x^2-2x-3)(x^2-3x+2)}{x^2-4x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Решите неравенство $x^2 + 3ax - a > 0$ при всех значениях параметра.

5. Решите уравнение $\sqrt{x-2} = a - 2$ при всех значениях параметра.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$$

имеет решения.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2(a+2)x + 12 + a^2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

3. Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 8$ и определите, какое наибольшее число общих точек этот график может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс.

4. Решите неравенство $x^2 - 8ax + 15a^2 < 0$ при всех значениях параметра.

5. Решите уравнение $x + \sqrt{x} = a$ при всех значениях параметра.

Вариант 3

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + a = 1 \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

3. Постройте график функции $y = |x|(x-1) - 5x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

4. Решите неравенство $ax^2 + 2x + 1 \geq 0$ при всех значениях параметра.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ при всех значениях параметра.

Вариант 4

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ние $ax^2 + 2(a+1)x + (a+3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

3. Постройте график функции $y = \frac{(0{,}75x^2+1{,}5x)|x|}{x+2}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

4. Решите неравенство $\frac{x^2}{m} - 2x - \frac{x}{m} + m + 1 > 0$ при всех значениях параметра.

5. Решите уравнение $\sqrt{x + a} = x$ при всех значениях параметра.

Вариант 5

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax + y = a^3 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет два корня, сумма которых равна 0.

3. Постройте график функции $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

4. Решите неравенство $ax^2 + (2a - 1)x + 1 - 3a \geq 0$ при всех значениях параметра.

5. Решите уравнение $\sqrt{3x - x^2} = x + a$ при всех значениях параметра.

Занятия 5
ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Базовые задачи

1. Один из трех братьев – Витя, Толя, Коля – разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев – Андрей и Дима.

– Это мог сделать или Витя, или Толя, – сказал Андрей.

– Я окно не разбивал, – возразил Витя, – и Коля тоже.

– Вы оба говорите неправду, – заявил Толя.

– Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, – возразил Дима.

– Ты, Дима, не прав, – вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

2. Четыре друга – Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С), Деев (Д) – решили провести свой отпуск в четырех различных городах – Москве, Пятигорске, Киеве и Ташкенте. В какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1) если А не едет в Москву, то С не едет в Пятигорск;

2) если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву;

3) если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев;

4) если Д не едет в Москву, то В едет в Москву;

5) если Д не едет в Пятигорск, то В не едет в Москву?

3. Шесть спортсменов – Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов, Ершов – в проходившем соревновании заняли шесть первых мест, причем ни одно место

не было разделено между ними. О том, кто какое место занял, были получены такие высказывания:

1) Кажется, первым был Адамов, а вторым – Дронов;

2) Нет, на первом месте был Ершов, а на втором – Глебов;

3) Вот так болельщики! Ведь Глебов был на третьем месте, а Белов – на четвертом;

4) И вовсе не так: Белов был пятым, а Адамов – вторым;

5) Все вы перепутали: пятым был Дронов, перед ним – Ветров.

Известно, что в высказывании каждого болельщика одно утверждение истинное, а другое ложное. Определите, какое место занял каждый из спортсменов.

4. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

– Витя не ставил кляксу, – сказал Алеша. – Это сделал Боря.

– Ну а ты что скажешь? – спросила бабушка Борю.

– Это Витя поставил кляксу, – сказал Боря. – А Алеша не пачкал скатерть.

– Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, – сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух случаев сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1

1. В лицее занятия по информатике, английскому языку, физике, краеведению, татарскому языку и истории ведут три педагога – Махеев, Вагапов и Тиунов. Каждый из них преподаёт два предмета. Преподаватель краеведения и преподаватель татарского языка – соседи по дому. Махеев – самый младший из троих. Все трое: Тиунов, преподаватель физики и преподаватель татарского языка – ездят из школы вместе. Преподаватель физики старше преподавателя

информатики. В свободное время преподаватель английского языка, преподаватель информатики и Махеев обычно играют в домино. Кто какие предметы преподаёт?

2. Виноградов, Поспелов, Сабиров и Шмонов – четыре талантливых человека. Один из них – иллюзионист, другой – художник, третий – певец, а четвёртый – писатель. О них известно следующее. Виноградов и Сабиров сидели в зале филармонии в тот вечер, когда певец дебютировал в сольном концерте. Поспелов и писатель вместе позировали художнику. Писатель написал биографическую повесть о Шмонове и собирается написать о Виноградове. Виноградов никогда не слышал о Сабирове. Кто чем занимается?

3. Иванов, Петров, Сидоров и Шакиров – жители Бугульмы. Их профессии: милиционер, стоматолог, повар и технолог. Иванов и Петров – соседи и всегда на работу ездят вместе. Петров старше Сидорова. Иванов регулярно обыгрывает Шакирова в настольный теннис. Повар всегда на работу ходит пешком. Милиционер не живёт рядом со стоматологом. Технолог и милиционер встречались единственный раз, когда милиционер оштрафовал технолога за нарушение правил дорожного движения. Милиционер старше стоматолога и технолога. У кого какая профессия?

4. В одном из вагонов поезда ехали 6 пассажиров, живущих в разных городах: Москве, Одессе, Санкт-Петербурге, Киеве, Харькове и Минске Их фамилии: Михайлов, Жаворонков, Петров, Горбунов, Николаев и Валентинов. При посадке Петров помогал одесситу грузить багаж. В дороге выяснилось, что Михайлов и москвич – врачи; Николаев и петербуржец – учителя; Петров и минчанин – инженеры. Жаворонков и Валентинов – участники Великой Отечественной войны, а минчанин в армии не служил. Петров и харьковчанин сошли в Киеве, а Михайлов поехал дальше. Валентинов вёл спор с петербуржцем о пользе нового лекарства. Определите место жительства каждого из пассажиров, а затем назовите их профессии.

5. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

6. Четыре ученицы: Мария, Нина, Ольга и Полина – участвовали в соревнованиях и заняли первые четыре места. На вопрос, кто из них какое место занял, три девушки ответили:

1) Ольга была вторая, Полина – третья;

2) Ольга была первая, Нина – вторая;

3) Мария была вторая, Полина – четвертая.

В каждом из этих трех ответов одна часть верна, а другая неверна (какая именно часть верна – неизвестно). Какое место заняла каждая из девушек?

Вариант 2

1. Три товарища-спортсмена: Михаил, Николай и Павел – занимаются в одном колледже. Каждый из них увлекается двумя видами спорта из следующих шести: плавание, футбол, волейбол, баскетбол, велоспорт и теннис. Все трое: Павел, теннисист и пловец – ходят из колледжа домой вместе. Пловец и футболист – соседи по дому. Михаил – самый младший из троих, а теннисист старше велосипедиста. Наиболее интересные спортивные передачи по телевидению все трое: Михаил, волейболист и велосипедист – смотрят вместе. Кто какими видами спорта увлекается?

2. В финале турнира армейских шахматистов встретились шесть человек: майор, капитан, лейтенант, прапорщик, сержант и ефрейтор. Их специальности: лётчик, танкист, артиллерист, миномётчик, сапёр и связист. В первом туре лейтенант выиграл у лётчика, майор у танкиста, а сержант у миномётчика. Во вто-

ром туре капитан выиграл у танкиста. В третьем и четвёртом турах миномётчик из-за болезни не участвовал в турнире, поэтому свободными от игры оказались капитан и ефрейтор. В пятом туре майор выиграл у связиста. Победителями турнира оказались лейтенант и майор. Хуже всех выступил сапёр. Назовите специальности каждого из шахматистов.

3. Пять мужчин: Леонид, Владимир, Николай, Олег и Пётр – живут в Самаре. Их фамилии: Степанов, Борисов, Козин, Дроздов и Истомин. Борисов знаком только с двумя, а с Козиным знаком только один мужчина. Пётр знаком со всеми, кроме одного, а Леонид знает только одного из них. Николай и Истомин знают друг друга с детства. Владимир и Николай дружат с Олегом. Дроздов и Владимир вовсе не знакомы, а Олег, Николай и Борисов часто ходят вместе на стадион. Назовите имена и фамилии каждого из мужчин.

4. Четыре лётчика-испытателя: Денис, Степан, Пётр и Василий – получили задание испытать 4 разных самолёта. Каждый самолёт должен быть испытан каждым лётчиком. Испытания проводились одновременно и были выполнены лётчиками за четыре дня. В первый день Денис испытывал самолёт Ми, во второй – самолёт Ла, а в четвёртый – самолёт Ту. В те дни, когда Денис поднимался на самолётах Ми и Ан, у Степана на испытаниях были Ан и Ту. У Петра первым на испытании был самолёт Ту, а последним Ми. В какой последовательности испытывал самолёты Василий?

5. Было совершено ограбление. Мегрэ сообщили, что подозреваются трое бродяг: Луи, Франсуа и Этьен. Бродяги дали следующие показания:

Луи: Чтобы обвинить меня, достаточно доказать, что Франсуа участвует в ограблении только тогда, когда в нем участвует Этьен, но я не виновен.

Франсуа: Если Луи невиновен, то, чтобы обвинить меня, достаточно признать Этьена тоже невиновным. Но Этьен виновен тогда и только тогда, когда виновен Луи. А если Этьен виновен, то я не виновен.

Этьен: Виновен либо я, либо Франсуа и Луи.

Мегрэ знал, что Этьен всегда лжет, а Луи и Франсуа всегда говорят правду. Это помогло ему распутать дело. Кто был причастен к ограблению?

6. При составлении расписания на определенный день в определенном классе преподавателями были высказаны просьбы:

1) математик желает иметь первый или второй урок;

2) историк желает иметь первый или третий урок;

3) литератор желает иметь второй или третий урок.

Как удовлетворить все пожелания и можно ли это сделать одним способом?

Вариант 3

1. Студенты университета организовали эстрадный квартет. Александр играет на саксофоне. Пианист учится на физическом факультете. Ударника зовут не Виктором, а студента географического факультета зовут не Романом. Александр учится не на историческом факультете. Пётр не пианист и не биолог. Виктор учится не на физическом факультете, а ударник – не на историческом. Роман играет не на контрабасе. На каких инструментах играют участники и на каких факультетах они учатся?

2. В шахматном турнире принимали участие шесть игроков из разных городов России: Воркуты, Иркутска, Саратова, Тюмени, Уфы и Шатуры. В первом туре Александр играл с представителем Воркуты, уфимец – с Николаем, а Геннадий – с Михаилом. Во втором туре Денис играл с представителем Тюмени, а шахматист из Воркуты – с Николаем. В третьем туре Михаил играл с иркутянином. Кто из игроков какой город представлял, если в итоге Николай занял первое место, Геннадий и иркутянин поделили 2 и 3-е места, Денис был четвёртым, а Семён и саратовец поделили 5 и 6-е места?

3. В небольшом городке живут пятеро приятелей: Попов, Соловьёв, Ахметов, Зайцев и Максютин. Профессии у них разные: один из них – маляр, другой – почтальон, третий – плотник, четвёртый – мельник, пятый – парикмахер. Соловьёв и Зайцев никогда не держали в руках малярную кисть. Попов и Зайцев всё собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ. Соловьёв и Попов живут в одном доме с почтальоном. Попов и Ахметов каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Соловьёв брал билеты в театр для себя и для мельника. Назовите профессию каждого из приятелей.

4. В некотором городе обувной магазин закрывается каждый понедельник, хозяйственный – каждый вторник, продовольственный – каждый четверг, а парфюмерный магазин работает только по понедельникам, средам и пятницам. В воскресенье все магазины закрыты. Однажды подруги Галина, Файруза, Валентина и Ольга отправились за покупками, причём каждая в свой магазин, и притом в один. По дороге они обменивались такими замечаниями:

Галина: Ольга и я хотели пойти вместе ещё раньше на этой неделе, но не было такого дня, чтобы мы обе могли сделать наши покупки.

Файруза: Я не хотела идти сегодня, но завтра я уже не смогу купить то, что мне нужно.

Валентина: А я могла бы пойти в магазин и вчера, и позавчера.

Ольга: А я могла бы пойти и вчера, и завтра.

Кому какой магазин нужен?

5. Определить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно, что:

1) если A участвовал, то и B участвовал;

2) если B участвовал, то или участвовал C, или A не участвовал;

3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал;

4) если D участвовал, то A участвовал.

6. Составленная перед концертом программа выступления была потеряна. О порядке следования номеров сохранилась лишь следующая информация: танцоры должны выступать или вторыми, или третьими; музыканты – первыми или вторыми, певцы – первыми или третьими. Какой порядок следования номеров был в потерянной программе?

Вариант 4

1. Катя, Наташа, Римма и Лиля – студентки факультета иностранных языков – увлекаются музыкой, и каждая из них играет на каком-нибудь инструменте, но только на одном: гитаре, скрипке, арфе или фортепиано. Каждая из них учится на одном из отделений факультета: английского, французского, немецкого или испанского языка. Та из них, которая играет на гитаре, учится на отделении испанского языка. Наташа не играет ни на скрипке, ни на арфе и не учится на отделении испанского языка. Катя тоже не играет ни на арфе, ни на скрипке и не учится на отделении английского языка. Студентка отделения немецкого языка играет на фортепиано. А Римма учится на отделении французского языка и не играет на скрипке. На каком инструменте играет и на каком отделении факультета иностранных языков учится каждая из студенток?

2. На спортивных состязаниях спортсмены с номерами 1, 2, 3 и 4 заняли первые четыре места, причём ни один из них не занял места, совпадающего с его номером. Оказалось, что номер спортсмена, занявшего четвёртое место, совпадает с номером места того спортсмена, чей номер есть номер места спортсмена с номером 2; спортсмен с номером 3 занял не первое место. Какое место занял каждый из спортсменов?

3. Однажды, сидя в чайхане, Ходжа Насреддин заинтересовался беседой четырёх мужчин, сидевших рядом с ним. Это была очень интересная компания, так как мужчины говорили между собой на нескольких языках и часто один переводил другому сказанное третьим. Вскоре Ходже стало ясно, как зовут каж-

дого из четырёх. В своей беседе мужчины использовали четыре языка: армянский, персидский, греческий и турецкий, однако не было языка, который был бы известен всем. При этом каждый из них владел двумя языками. Самый младший из четырёх, Салал, не знал персидского, но был переводчиком, когда Мохаммед хотел объясниться со стариком Абдулой, прекрасно владевшим персидским. Мохаммед не только говорил на своём родном турецком языке, но и свободно разговаривал с Юсуфом, не знавшим по-турецки ни слова. Ни Салал, ни Абдула, ни Юсуф не знали языка, на котором могли бы объясниться все трое между собой. Ходжа Насреддин заметил, что среди собеседников не было ни одного, кто владел бы одновременно и армянским, и турецким. Какими же языками владел каждый из четверых мужчин?

4. Каждому из шести учёных – назовём их А, Б, В, Г, Д и Е – на корабле была отведена отдельная каюта. Двое из них были москвичи; ещё двое – Д и тот, кто находился в каюте № 5, – были из Минска. Обитатель каюты № 3 и А были из Киева. В разместился рядом со своим земляком, который жил в каюте № 6, а с другой стороны от него находились каюты киевлян. Земляк киевлянина Е в своей каюте № 4 оборудовал фотолабораторию. Е и Б оказались соседями. Какие учёные в каких каютах разместились?

5. Во время допроса каждый из трех подозреваемых сделал следователю три заявления.

Валет: Я не виновен; Туза я не знаю; Серый знает, кто это сделал.

Хват: Это сделал не я; с Серым я не знаком; это сделал Туз.

Туз: Я не виновен; это сделал Серый; Хват лжет, это сделал не я.

Серый: Я не виновен; это сделал Валет; Хват может за меня поручиться.

При перекрестном допросе каждый из них признал, что из трех сделанных им заявлений два верных и одно неверное. Определите преступника на основании полученной информации.

6. Аня, Варя и Клава пошли на дискотеку. Одна из них была в красном платье, другая – в белом, третья – в синем. На вопрос, какое платье было на каждой из девушек, они дали такой ответ: Аня была в красном, Варя – не в красном, Клава – не в синем. В этом условном ответе из трех частей одна верна, две неверны. В каком платье была каждая из девушек?

Вариант 5

1. На международном конгрессе встретились 4 делегата из разных стран. Каждый из них владеет двумя языками из четырёх (английский, французский, итальянский, немецкий). Однако оказалось, что нет такого языка, на котором они могли бы разговаривать вчетвером или втроем. Никто из делегатов не владеет французским и немецким языками одновременно. Хотя физик не говорит по-английски, он может служить переводчиком, если математик и биолог захотят поговорить друг с другом. Биолог говорит по-немецки и может говорить с химиком, хотя тот не знает ни одного немецкого слова. Физик, математик и химик не могут беседовать втроём на одном языке. Какими двумя языками владеет каждый из них?

2. В семье Гарифуллиных пять человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один – инженер, другой – юрист, третий – слесарь, четвёртый – экономист, пятый – учитель. Вот что ещё известно о них. Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь – хороший спортсмен. Он пошёл по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Гарифуллиных.

3. Однажды в международном лагере отдыха за круглым столом оказалось пятеро парней из Москвы, Санкт-Петербурга, Новгорода, Казани и Уфы. Их имена: Саша, Никита, Руслан, Петя и Миша. Москвич сидел между уфим-

цем и Мишей, санкт-петербуржец – между Сашей и Никитой, а напротив него сидели казанец и Руслан. Петя никогда не был в Санкт-Петербурге, а Саша не бывал в Москве и Уфе. Уфимец с Никитой регулярно переписываются. В каком городе живёт каждый из ребят?

4. Машинист, помощник машиниста, кондуктор и проводник – сотрудники поездной бригады. Их имена: Василий, Иван, Николай и Алексей. Николай старше Василия. У кондуктора нет родственников в бригаде. Машинист и помощник машиниста – братья. Других братьев у них нет. Николай – племянник Ивана. Проводник – не дядя машиниста, а помощник машиниста – не дядя проводника. Кто кем работает и какие родственные отношения существуют между членами бригады?

5. Шестеро подозреваемых в преступлении давали показания.

А: Е виновен.

Б: А лжет, и я не виновен.

В: Виновны А или Е, а возможно, и оба.

Г: В говорит правду.

Д: В и Е оба лгут.

Е: Я невиновен.

Если правду сказал один и только один из подозреваемых, то кто совершил преступление?

6. В университете проводились соревнования по плаванию. Болельщики высказывали следующие предположения.

1) Саша будет первым, а Сережа вторым;

2) Первым будет Дима, а Костя займет третье место;

3) Дима будет вторым, а Сережа может рассчитывать только на третье место.

По окончании соревнований выяснилось, что каждый из болельщиков в одном из предположений оказался прав. Кто же из студентов занял первое, второе, третье и четвертое места, если известно, что эти места распределены между вышеупомянутыми ребятами?

Занятие 6
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

Базовые задачи

1. Даны две прямые с уравнениями $y = kx$ и $y = x + k$. Пусть они пересекаются в точке A, а параметр k непрерывно изменяется в некотором диапазоне. Определить, какую линию при этом описывает точка A.

Решение. Найдем координаты точки пересечения данных прямых. Тогда $kx = x + k$, откуда $x = \frac{k}{k-1}$. Подставим найденное значение в уравнение прямой $y = kx$, что дает $y = \frac{k^2}{k-1}$. Точка A имеет координаты $\left(\frac{k}{k-1}; \frac{k^2}{k-1}\right)$. Исключим параметр k. Находим, что $k = \frac{x}{x-1}$. Далее $y = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}{\frac{x}{x-1}-1} = = \frac{x^2}{x-1}$.

Таким образом, точка A описывает линию с уравнением $y = \frac{x^2}{x-1}$.

2. Имеется 19 монет, из которых одна фальшивая и легче остальных. Как за наименьшее число взвешиваний найти фальшивую монету?

Решение. Разделим монеты на три части: две по 6 монет и одну в 7 монет. Взвесим две равные кучи вместе. Если они равны, то фальшивая монета среди семи монет, в противном случае выберем ту, которая легче. Выбранную кучу монет снова поделим на три части. Пусть было выбрано 7 монет, тогда делим на 2, 2 и 3 монеты, для 6 монет деление имеет вид 2, 2 и 2 монеты. Вторым взвешиванием сравниваем кучи из 2 монет. В результате выбираем более легкую. Если сравниваемые монеты равны по весу, то берем оставшуюся. В результате получаем 2 или 3 монеты. Либо сравниваем две монеты друг с другом, либо выбираем две из трех. Таким образом, за три взвешивания можно определить фальшивую монету.

Задачи для самостоятельной работы

1. Даны две прямые с уравнениями $y = kx + a$ и $y = cx + k$. Пусть параметры a и c принимают некоторые фиксированные значения. Параметр k пробегает некоторый диапазон значений. Определить, какую линию при этом образует точка пересечения этих прямых A. Исследовать свойства этой линии при различных значениях a и c.

2. Пусть имеется n монет, из которых одна фальшивая и легче остальных. Определить, за какое наименьшее число взвешиваний можно гарантированно определить фальшивую монету. Как изменится решение задачи, если фальшивая монета тяжелее остальных?

3. Доказать существование и единственность, а также описать процесс построения вписанной в тетраэдр сферы.

4. Доказать существование и единственность, а также описать процесс построения описанной около тетраэдра сферы.

Занятие 7

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Основные теоретические сведения

Алгоритм решения задачи с помощью метода математической индукции:

1) проверка базы индукции при $n = 1$;

2) формулировка индуктивного предположения при $n = k$;

3) выполнение индуктивного перехода при $n = k + 1$.

Базовые задачи

1. Докажите равенство $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Докажите равенство $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3. Докажите, что $n^3 + 5n$ делится на 6.

4. Докажите, что $7^n + 3n - 1$ делится на 9.

5. Докажите неравенство $n^2 > n + 1$, которое выполняется при $n > 1$.

6. Докажите неравенство $2^n \geq n + 1$.

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Докажите, что сумма первых n чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Докажите равенство $-1 + 3 - 5 + \cdots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n n$.

3. Докажите равенство $\frac{1}{5\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 19} + \cdots + \frac{1}{(7n-2)(7n+5)} = \frac{n}{5(7n+5)}$.

4. Докажите, что $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ кратно 6.

5. Докажите неравенство $4^n > 7n - 5$.

Вариант 2

1. Докажите, что сумма первых n чисел вида $a_n = 3n - 2$ равна $\frac{n(3n-1)}{2}$.

2. Докажите равенство $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

3. Докажите равенство $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

4. Докажите, что $7^{2n} - 1$ кратно 24.

5. Докажите неравенство $2^n > 5n + 1$.

Вариант 3

1. Докажите равенство $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

2. Докажите равенство

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Докажите равенство $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{2n^2-1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n^2}{2n+1}$.

4. Докажите, что $13^n + 5$ кратно 6.

5. Докажите неравенство $3^{n-1} > 2n^2 - n$, где $n \geq 5$.

Вариант 4

1. Докажите, что сумма кубов n первых натуральных чисел равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Докажите равенство $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

3. Докажите равенство $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{n\cdot(n+3)}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n\cdot(n+1)}{n+2}$.

4. Докажите, что $15^n + 6$ кратно 7.

5. Докажите неравенство $3^n - 2^n \geq n$, где $n \geq 5$.

Вариант 5

1. Докажите равенство $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

2. Докажите равенство $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

3. Докажите равенство $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$.

4. Докажите, что $9^n + 3$ кратно 4.

5. Докажите неравенство $4^n \geq n^2 + 3^n$, где $n \geq 5$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галицкий, М. Л. Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8–9 классов с углубленным изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. – 10-е изд. – Москва : Просвещение, 2004. – 271 с.
2. Гомонов, С. А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10–11 кл.: учебное пособие / С. А. Гомонов. – 2-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа, 2006. – 254 с.
3. Игошин, В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В. И. Игошин. – 3-е изд., стер. – Москва : Издательский центр «Академия», 2007. – 304 с.
4. Кузнецова, В. А. Сборник задач по математике для студентов юридического факультета / В. А. Кузнецова, Л. Б. Медведева; Ярославский государственный университет. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – 140 с.
5. Сгибнев, А. И. Исследовательские задачи для начинающих. 2-е изд., испр. и доп. / А. И. Сгибнев. – Москва : МЦНМО, 2015. – 136 с.
6. Синюк, А. И. Сборник логических задач школьного типа, решаемых табличным методом: пособие для студентов вузов, колледжей и учащихся средних учебных заведений / А. И. Синюк. – Альметьевск: Академия наук социальных технологий и местного самоуправления, Закамское отделение, 2005. – 28 с.
7. Фарков, А. В. Готовимся к олимпиадам по математике: учеб.-метод. пособие / А. В. Фарков. – 5-е из., стереотип. – Москва : Экзамен, 2010. – 158 с.
8. Фарков, А. В. Математические олимпиадные работы. 5–11 классы / А. В. Фарков. – Санкт-Петербург : Питер, 2010. – 192 с.

9. Шестаков, С. А. ЕГЭ-2019. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / под ред. И. В. Ященко. – Москва : МЦНМО, 2019. – 288 с.

10. Шестаков, С. А. ЕГЭ-2019. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / под ред. И. В. Ященко. – Москва : МЦНМО, 2019. – 208 с.

11. Я иду на урок математики. 5 класс. Книга для учителя. – Москва : Первое сентября, 2000. – 352 с.